

T E O R I A

degli “**ERRORI**”

Già il titolo è tutto un programma !!!

Si tratta di errori !

Ma come a scuola c'è qualcuno che ci parla di errori ?

Ci dirà come combatterli ?

Come si fa ad evitarli ?

Questo è quello che verrebbe in mente ad un alunno che non abbia mai sentito parlare degli errori in aula !

Ma, lo so bene, **Voi siete ormai degli esperti**, in materia, per cui quello che andrò a scrivere, sarà, per Voi, solo un ripasso, **almeno lo spero !**

Buona lettura.

Come ben sapete, **fare, studiare Fisica, significa cercare di capire come funziona il mondo che ci circonda, dal punto di vista fisico.**

Per fare questo, ben lo sappiamo, **siamo costretti a fare delle esperienze, di tipo fisico,** non di tipo qualsiasi, ma solo e soltanto di tipo fisico.

Allora, per prima cosa, **cerchiamo di capire come si fa a sapere se un'esperienza è di tipo fisico o meno.**

Affermo **che un'esperienza è di tipo fisico, se e solo se, tutto ciò che partecipa allo svolgimento dell'esperienza resta uguale a se stesso, nella sostanza,** durante tutto il tempo che dura l'esperienza stessa, compresi gli sperimentatori, ovviamente.

Dicevo, “nella sostanza”, che cosa vuol dire ?

Mi spiego.

Rompere una bottiglia di vetro, sarà pure stupido e dispendioso, ma comunque è **un'esperienza di tipo fisico !**

Perché ?

Bene, lo sperimentatore, al massimo, durante l'esperienza, si sarà anche ferito, se è stato poco accorto a rompere la bottiglia ma la bottiglia si sarà rotta.

Vediamo un po' di capire come stanno le cose:

All'inizio dell'esperienza:

- **abbiamo** uno sperimentatore sano ed **una bottiglia di vetro intera**.

Alla fine dell'esperienza avremo:

- uno sperimentatore che al massimo si sarà ferito se è stato poco accorto a rompere la bottiglia
- **una bottiglia di vetro rotta**

E' cambiato qualche cosa ?

No.

1. lo sperimentatore guarirà
2. **la bottiglia era ed è di vetro, anche se è rotta, volendo si può rifondere il vetro rotto e ricostruire la bottiglia.**

Poiché alla fine nulla è cambiato, l'esperienza è di tipo fisico !

Se, invece **brucio un pezzo di legna**, alla fine dell'esperienza avremo:

- uno sperimentatore che si sarà al massimo bruciato, se poco accorto, ma guarirà
- **il pezzo di legno sarà scomparso** e al suo posto troveremo
 - **cenere**, per terra
 - **fumo**, disperso nell'ambiente
 - **luce**, dispersa nell'ambiente
 - **calore**, disperso nell'ambiente

Posso da queste **quattro cose che mi ritrovo** alla fine dell'esperienza ricavare il pezzo di legno che avevo all'inizio dell'esperienza ?

Certamente no.

Allora questa esperienza non è di tipo fisico, infatti questa è un'esperienza di tipo chimico, è una reazione esotermica.

Credo che con questi due esempi risulti chiaro che cosa si intende per esperienza di tipo fisico e di tipo non fisico.

Ho incluso anche **lo sperimentatore** per essere il più completo possibile nella descrizione dell'esperienza, a questo punto **possiamo anche disinteressarcene**, infatti, per questo, in precedenza, non ho mai, particolarmente sottolineato, in qualche modo, la sua presenza !

Ora torniamo agli errori.

Che cosa c'entrano gli errori con questo discorso ?

Ho già detto, prima, che per iniziare a fare qualsiasi esperienza siamo costretti a fare, per forza, delle misurazioni; questo vale sempre !

Per esempio, le due esperienze precedenti, potevano essere eseguite, per controllare, se la massa degli oggetti coinvolti, vetro o legno che fosse, si conservasse o meno; anche per la seconda esperienza ci vuole un controllo !!

Per avere questa informazione siamo costretti a misurare la massa, del vetro e del legno, due volte, prima e dopo l'esecuzione delle rispettive esperienze, per vedere se i risultati delle misurazioni sarebbero stati gli stessi o meno; le misurazioni vanno fatte in ogni tipo di esperienza.

Per essere più sintetici discutiamo solo della rottura della bottiglia di vetro, che è quella che ci interessa, tanto il discorso si ripete pari pari per il pezzo di legno acceso e per tutte le altre esperienze possibili di questo mondo.

Intanto premettiamo che le esperienze si intendono fatte, tutte e sempre, con la massima accortezza, competenza, concentrazione ecc. e con gli stessi strumenti.

L'esperienza ci mostra che:

- se la misurazione, che ci interessa, la facciamo una sola volta, abbiamo un solo risultato e tutto finisce lì.

- **i problemi nascono quando eseguiamo la misurazione** non una sola volta **ma due o più volte**.
- se facciamo la stessa misurazione due, o più volte, accade una cosa che, **a prima vista**, è molto strana:
 - **i risultati delle misurazioni ripetute sono sempre diversi, di poco, ma diversi !**

Ricordiamo, ancora per un attimo, che le misurazioni le facciamo sempre, tutte, con la massima accortezza, nel migliore dei modi che ci è possibile ecc.

Perché, allora, avviene questo fenomeno ?

La risposta è molto semplice.

Ciò avviene perché, **quando facciamo delle misurazioni, commettiamo sempre degli errori.**

Anzi.

Chi opera in questo campo di **errori** ne può compire di **due tipi diversi**:

- **errori sistematici**
- **errori accidentali**

Gli errori sistematici sono quelli che ci preoccupano meno.

Questo tipo di errore avviene sempre nello stesso senso, o dà sempre valori in eccesso o dà sempre valori in difetto, il che significa che **il risultato delle misurazioni sarà sempre più grande o sempre più piccolo di quello che dovrebbe essere.**

Mi spiego meglio.

- Supponiamo che debba misurare la lunghezza di una rotaia di treno
- Supponiamo che mi venga dato un metro al quale, qualcuno, senza dirmi niente, abbia tagliato, tolto, due interi centimetri
- Poiché io non ne so niente di questo fatto, in tutta tranquillità faccio le mie misurazioni, convinto di usare un metro regolare, infatti io sono convinto di avere tra le mani un metro di 100 cm
- Faccio le misurazioni e trovo che la rotaia è lunga 20 m

- Su questo risultato della misura ci giuro, l'ho fatta io, l'ho fatta per bene, sono 20 m
- A questo punto viene da me il colpevole della alterazione della lunghezza del metro e mi avverte che ha tolto ben 2 cm, quindi il metro che ho usato non è lungo 100 cm., bensì solo 98 cm
- Subito mi rendo conto che ogni volta che ho usato il metro, cioè per 20 volte, ho misurato 98 cm e non 100 cm
- **La correzione è immediata**
- 20 metri (teorici) meno $2 \cdot 20 \text{ cm} = 40 \text{ cm}$ da sottrarre a 20 m, quindi la lunghezza della rotaia non è 20 metri ma 20 metri meno 40 centimetri cioè 19,60 m : **19 metri più 60 centimetri**
- **Ho corretto l'errore**, ho trovato la lunghezza esatta della rotaia e così **ho risolto il problema**
- **Ma se nessuno mi avesse avvisato della alterazione effettuata io in buona fede, avrei giurato che la rotaia era lunga 20 m !!!**

Morale della favola:

- Questo tipo di errore, cioè **l'errore sistematico**, quello che faccio sempre nello stesso senso, o **in difetto**, come nel caso che ho illustrato, o **in eccesso**, nel caso che quel qualcuno avesse, invece, aggiunto in qualche modo qualche centimetro al metro, è un tipo di errore che se uno, in qualche maniera, si accorge di averlo fatto lo può correggere e quindi da quel momento non esiste più, ma se non se ne accorge non può correggerlo e quindi è costretto a tenersi l'errore che per lui non esiste
- **Cioè in ogni caso l'errore, per lo sperimentatore, o non esiste, perché non sa di averlo fatto, o non esiste più, perché l'ha corretto, in ogni caso si può dimenticare di questo tipo di errore.**

Molto diverso è il caso degli errori accidentali.

Questo tipo di errore

- **avviene per caso, non è ripetitivo nello stesso senso**, infatti **può verificarsi**, o **in eccesso** o **in difetto**, **casualmente, senza nessuna regola, come capita.**
- **non se ne conosce l'entità**
- **è incorreggibile**

Di questo tipo di errore, che è completamente diverso da quello sistematico, ha caratteristiche diverse, si occupa la:

TEORIA DEGLI ERRORI.

Questa teoria prende in considerazione tutti i risultati che si ottengono in una serie di misurazioni e li elabora.

La teoria degli errori, fatta bene, è piuttosto complessa ed usa anche una matematica abbastanza avanzata, tipo il calcolo differenziale.

Io esporrò una teoria più semplificata e non molto approfondita, che, comunque, è **adattissima ai nostri scopi**.

Partiamo, allora, con questa esposizione.

Fatte **ripetute misurazioni** ci troviamo ad avere **da un minimo di due a decine o centinaia o migliaia di risultati diversi**, **tutti della stessa misurazione**.

Che ne facciamo di questi risultati ?

Nota: usiamo la convenzione, che si fa sempre in matematica, di identificare una serie di numeri con delle lettere dell'alfabeto a piacere, con **pedice**. (Il **pedice** è quel numeretto che vedete a destra della lettera, piccolino, un poco sotto la lettera stessa)

In questi appunti userò, generalmente, la lettera: **a** con pedice, quando serve.

Ad esempio se mi ritrovo che ho fatto 10 misurazioni le posso elencare, una dopo l'altra in questa maniera:

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$

Se le misurazione fossero in numero di **n**, dove n è un numero qualsiasi, le posso elencare così:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$

Diamo anche un risultato che è conseguenza dell'esperienza:

Poiché ripetendo le misurazioni abbiamo tanti risultati diversi è evidente che il valore vero di una misurazione non esiste.

In genere, per i ragionamenti che si devono, comunque, fare, il **valore vero** di una misurazione, **anche se non esiste**, è indicato, con la stessa lettera della serie, con a pedice lo zero, ad esempio con:

a_0 oppure **b_0** oppure **c_0** e così via, se cambiamo lettera.

Un'ultima cosa.

E' chiaro che se ripetiamo una misurazione 10 volte possiamo avere, al massimo, 10 risultati diversi, ma non ci dobbiamo meravigliare se ripetendo 100, 200, 500 o 1000 volte una stessa misurazione **alcuni valori si possano ripetere una o più volte, non è un problema !**

Supponiamo di aver fatto **n** volte una misurazione e quindi abbiamo avuto **n** risultati, in genere diversi, ma **ci può essere anche qualche valore che si ripete** come ho appena detto.

La prima cosa da fare è di trovare il **valor medio** della serie di **misurazioni**, che in genere viene indicata con la stessa lettera della serie di misure fatte con un **m** a pedice oppure con la stessa lettera con un trattino sopra, ad esempio:

a_m oppure **$\overline{a}$**

Il valor medio di n misurazione è uguale alla somma di tutte le misurazioni fatte e dividendo, questa somma, per il numero, n , delle stesse:

$$\bar{a} = a_m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n}{n}$$

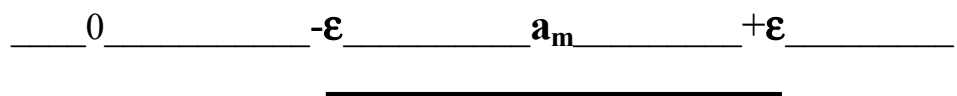
Il valor medio è molto importante perché, poiché non esiste, come ho detto, il valore vero di una grandezza, questo a_m è quello che forse, probabilmente, è quello più indicativo di questa serie di misurazioni, è quello che più di tutti potrebbe avvicinarsi al valore vero, se questo esistesse.

Questo valore da solo non basta, bisogna affiancargli quello che si chiama errore, che viene indicato, in genere, con la lettera epsilon dell'alfabeto greco: ϵ .

Il discorso è questo:

- abbiamo trovato il valore a_m , quello più indicativo, bene, se questo non è il valore vero, e questo non lo potremo mai sapere, con l'operazione che vado subito a descrivere, il valore vero dovrebbe essere contenuto, con un'alta probabilità

nell'intervallo: $a_m \pm \epsilon$ il che significa che, ponendo i valori sull'asse dei numeri reali, si ha, per esempio:



- cioè il valore vero, sempre se esistesse, si troverebbe, con una probabilità molto alta nell'intervallo detto prima, $a_m \pm \epsilon$, che è quello indicato sopra il tratto nero nel disegno che precede.
- Se quest'intervallo lo si raddoppiasse, o triplicasse, la probabilità sarebbe ancora più alta, molto più alta, ma non sarebbe mai del 100%

- Deve sempre esistere la possibilità, quantunque questa possa essere piccola, anzi piccolissima, quasi nulla, se vogliamo, che il valore vero si trovi fuori dall'intervallo indicato.
- Una sola cosa è certa: il valore vero deve trovarsi in un punto dell'asse reale, solo sull'asse reale la probabilità di trovarlo deve essere del 100% .

Il problema che ci si pone è quello di trovare l'errore ε .

Per fortuna è abbastanza facile.

Essendo le misurazioni almeno due, ma in genere saranno molto di più, si va a prendere il valore più grande della serie di misurazioni, che indico con a_{MAX} , a questo si sottrae il valore più piccolo, che indico con a_{min} , della stessa serie di misurazioni, poi, il risultato di questa differenza lo divido per 2, ossia:

$$\varepsilon = \frac{a_{MAX} - a_{min}}{2} \quad (1)$$

a questo valore si dà il nome di: **errore assoluto**.

E' abbastanza intuitivo capire che questo errore assoluto, ε , non darà molte informazioni.

Da una operazione come la (1) potrebbe venir fuori, ad esempio, che:
 $\varepsilon = 3 \text{ mm}$.

Se ho un errore assoluto di 3 mm, posso dire che la serie di misurazioni che ho fatto è molto buona, buona, cattiva o molto cattiva, ecc.?

Certamente no !

Perché:

- Se l'errore di **3 mm**, l'ho fatto effettuando una misura di **70 Km**, evidentemente **la misura è ottima**
- Se, invece, l'errore di **3 mm** l'ho fatto effettuando una misura di **10 cm** evidentemente è stata fatta una serie di misurazioni di **pessima qualità**.

Per ovviare a questa **incompletezza di informazione**, a questa mancanza d'informazione, **ci siamo inventati altri due tipi di errori** che sono **molto più significativi, danno maggiore informazione**.

- **L'errore relativo**, che è dato da:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{a_m}$$

- **L'errore percentuale**, che è dato da:

$$\varepsilon\% = \varepsilon_r * 100$$

L'errore relativo, lo dice lo stesso nome è “ l'errore relativo alla misura effettuata ”.

Più piccolo è questo errore, migliore è la serie di misurazioni eseguite.

L'errore percentuale dà una informazione, in percentuale, appunto, **più piccola è questa percentuale rispetto al 100%, migliore è la serie delle misurazioni eseguite.**

Ovviamente se avessimo una percentuale del 100%, significherebbe che il lavoro, cioè le misure effettuate, sarebbero del tutto sbagliate.

E' un modo di visualizzare questi risultati molto vicino al nostro attuale modo di vivere.

Siamo bersagliati da percentuali inerenti ad ogni problema.

Una volta che abbiamo fatto tutto il lavoro spiegato passo passo, che qui ripeto in sintesi:

1. **ripetizione della stessa misurazione, con la stessa cura, la stessa attenzione, con le stesse apparecchiature e nelle stesse condizioni ecc.**
2. **calcolo del valor medio**
3. **calcolo dell'errore assoluto**
4. **calcolo dell'errore relativo**
5. **calcolo dell'errore percentuale**

Non ci resta che scrivere il valore delle misurazioni fatte.

Esse, per come abbiamo agito, dovrà essere del tipo, chiamando, sempre, **a** la serie di misurazioni:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_m \pm \boldsymbol{\varepsilon}$$

dove:

- con **a_m** si intende il **valor medio** delle misurazioni eseguite
- con **ε** si intende **l'errore assoluto** di dette misurazioni

Fin qui tutto chiaro.

Supponiamo, per semplicità, **che abbiamo fatto due serie di misurazioni** che chiameremo **a** et **b** e che per ognuna di esse ci siamo trovati:

- **il valor medio**
- **l'errore assoluto**
- **l'errore relativo**
- **l'errore percentuale**

è ovvio che con queste due grandezze possiamo fare le 4 classiche operazioni matematiche:

- addizione
- sottrazione
- moltiplicazione
- divisione

Come operiamo nell'eseguire queste operazioni matematiche?

E' ovvio che ogni risultato dell'operazione matematica dovrà essere scritto sotto forma di valor medio aumentato o diminuito, cioè $\pm$, dell'errore che gli è proprio.

Bene.

Per quanto riguarda i valori medi delle 4 operazioni non c'è problema alcuno, esse saranno o la somma o la differenza o il prodotto o il rapporto dei rispettivi valori medi:

- $a_m + b_m$
- $a_m - b_m$
- $a_m * b_m$
- a_m / b_m

Per quanto riguarda gli errori, invece, qui sconfiniamo nel campo della propagazione degli errori, ci si regola come segue:

- se l'operazione da fare è una somma o una differenza allora l'errore sarà dato dalla somma dei rispettivi errori assoluti.

Quindi:

- $\mathbf{a + b = (a_m + b_m) \pm (\epsilon_a + \epsilon_b)}$

- $\mathbf{a - b = (a_m - b_m) \pm (\epsilon_a + \epsilon_b)}$

- se l'operazione da fare è una **moltiplicazione** o una **divisione** allora **l'errore** sarà dato dalla **somma** dei rispettivi **errori relativi**.

Quindi:

- $\mathbf{a * b = (a_m * b_m) \pm (\epsilon_{ra} + \epsilon_{rb})}$

- $\mathbf{a / b = (a_m / b_m) \pm (\epsilon_{ra} + \epsilon_{rb})}$

Dove:

ϵ_a ed ϵ_b sono, rispettivamente, gli **errori assoluti** di **a** e di **b** e ϵ_{ra} ed ϵ_{rb} sono, gli **errori relativi** di **a** e di **b**.

Come si vede, **gli errori si sommano sempre**, in ogni caso.

Se le grandezze su cui si opera fossero più di due si fa esattamente la stessa cosa.

E s e m p i o :

Supponiamo di aver fatto 5 misurazioni (per non allungare di molto la digitazione) di due grandezze che chiamiamo **a et **b** :**

$$a_1 = 7,47243$$

$$a_2 = 7,47239$$

$$a_3 = 7,47225$$

$$a_4 = 7,47241$$

$$a_5 = 7,47253$$

$$b_1 = 3,52856$$

$$b_2 = 3,52877$$

$$b_3 = 3,52856$$

$$b_4 = 3,52852$$

$$b_5 = 3,52873$$

Il valor medio, a_m , di **a è:**

$$a_m = \frac{7,47243 + 7,47239 + 7,47225 + 7,47241 + 7,47253}{5} = 7,4724020$$

arrotondando alla 5^a cifra decimale, centomillesimi, abbiamo:

$$a_m = 7,47240$$

facendo la stessa cosa per **b** abbiamo:

$$b_m = 3,52863$$

provate a fare i calcoli !

errore assoluto, ε_{a_a} , di **a è:**

$$\varepsilon_{a_a} = \frac{7,47253 - 7,47225}{2} = 0,000140$$

arrotondando alla 5° cifra decimale, come prima:

$$\varepsilon_{a_a} = 0,00014$$

errore relativo, ε_{ra} , di **a è:**

$$\varepsilon_{ra} = \frac{0,00014}{7,47240} = 0,0000187356137$$

arrotondando come al solito:

$$\varepsilon_{ra} = 0,00002$$

errore percentuale, $\varepsilon_a \%$, di **a è:**

$$\varepsilon_a \% = 0,00002 * 100 = 0,002 \%$$

fate gli stessi calcoli per la grandezza chiamata **b .**

A questo punto

la grandezza **a** avrà il valore:

$$\mathbf{a = 7,47240 \pm 0,00014}$$

la grandezza **b** avrà il valore:

$$\mathbf{b = 3,52863 \pm 0,00012}$$

Per le quattro operazioni matematiche principali:

$$\begin{aligned}\mathbf{\underline{a + b}} &= (7,47240 + 3,52863) \pm (0,00014 + 0,00012) = \\ &= \mathbf{11,00103 \pm 0,00026}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{\underline{a - b}} &= (7,47240 - 3,52863) \pm (0,00014 + 0,00012) = \\ &= \mathbf{3,94377 \pm 0,00026}\end{aligned}$$

$$\underline{a * b} = (7,47240 * 3,52863) \pm (0,00002 + 0,00003) =$$
$$= 26,36734 \pm 0,00005$$

$$\underline{a / b} = (7,47240 / 3,52863) \pm (0,00002 + 0,00003) =$$
$$= 2,11765 \pm 0.00005$$

La teoria degli errori si applica non solo alle esperienze di tipo fisico ma a tutte le esperienze di tipo scientifico.

Ogni volta che si eseguono delle misurazioni ripetute siamo costretti ad applicare la teoria degli errori.

La teoria degli errori si utilizza in tutti i lavori, in qualsiasi campo delle Scienze, quando si eseguono misurazioni ripetute più volte.

La teoria degli errori è una teoria del tutto generale.

Si applica

SEMPRE !!!!!

RIPETETE TUTTI I CALCOLI

.... PER VERIFICARE !!!

POTREI AVER SBAGLIATO !!!!!