Corso di Laurea in Informatica — Corso di Algebra (I gruppo)
Esercizi — Relazioni binarie

1. Ciascuno dei seguenti insiemi è il grafico di una relazione binaria in $\mathbb{Z}$. Studiare le relazioni così definite, stabilendo per ciascuna di essa se si tratta di una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica, antiriflessiva, di una relazione d'equivalenza, di un ordinamento.
a. $\{(n,m) \mid n+m \text{ è pari}\}$;
b. $\{(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid n=m \text{ oppure } n+m \text{ è multiplo di } 3\}$;
c. $\{(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid n<3m\}$;
d. $\{(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid n^2<m^2\}$;
e. $\{(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid n^2\le m^2\}$;
f. $\{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid n\equiv m \pmod{12}\}$;
g. $\{(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid 6 \text{ divide } 2n+3m\}$.

2. Ripetere lo stesso esercizio per le relazioni binarie definite come segue:
a. ρ', definita in $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ ponendo, per ogni $X,Y\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $X\ \rho'\ Y \iff (\exists \min X \wedge \exists \min Y \wedge \min X = \min Y)$;
b. ρ, definita in $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ ponendo, per ogni $X,Y\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $X\ \rho\ Y \iff \big((\exists \min X \wedge \exists \min Y) \Rightarrow \min X = \min Y\big)$;
c. τ, definita in $X=\{a,b,c,d\}$, dove $|X|=4$, con grafico $\{(a,a),(b,c),(a,d),(c,b),(c,c),(b,b)\}$;
d. σ, definita in $\mathbb{N}$ ponendo, per ogni $x,y\in\mathbb{N}$, $x\ \sigma\ y \iff x\neq y$;
e. ψ, definita in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ponendo, per ogni $X,Y\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $X\ \psi\ Y \iff |X\cap Y|=3$.

3. Con riferimento all'esercizio precedente, decidere quali tra le seguenti valgono:

$$\mathbb{N}\ \rho\ \mathbb{N}^{\#},\qquad \mathbb{N}\ \rho\ \big(\mathbb{N}-\{32,14,87\}\big),\qquad \mathbb{Z}\ \rho\ \mathbb{N}^{\#},\qquad \mathbb{Z}\ \rho\ (\mathbb{Z}-\mathbb{N}),\qquad \mathbb{Z}\ \rho\ (\mathbb{Z}-\mathbb{N}^{\#}),$$
$$(\mathbb{Z}-\mathbb{N}^{\#})\ \rho\ \varnothing,\qquad \{1\}\ \rho\ \{2\},\qquad \{1\}\ \rho\ \{1,2\};\qquad d\ \tau\ a;\qquad 5\ \sigma\ 55;$$
$$\mathbb{N}\ \psi\ \mathbb{N},\qquad \mathbb{N}\ \psi\ \mathbb{N}^{\#},\qquad \mathbb{N}\ \psi\ \{1,2,3\},\qquad \{n\in\mathbb{N}\mid n>12\}\ \psi\ \{n\in\mathbb{N}\mid n\le 20 \wedge\ n \text{ è primo}\}.$$

4. Sia ρ la relazione binaria in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definita da: $\forall X,Y\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\ \big(X\ \rho\ Y \iff |X|=|Y|\big)$. Verificare che ρ è una relazione di equivalenza e descrivere le classi di equivalenza modulo ρ di $\varnothing$, $\mathbb{N}$, $\{n\in\mathbb{N}\mid n>12\}$. Descrivere l'insieme quoziente $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\rho$, stabilendo, in particolare, se si tratta di un insieme finito o infinito e, nel primo caso, quanti elementi ha. Ripetere lo stesso esercizio dopo aver sostituito ρ con τ, definita da: $\forall X,Y\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\ \big(X\ \tau\ Y \iff (2\in X\cap Y \vee 2\notin X\cup Y)\big)$.

5. Tra i seguenti, dire quali sono diagrammi di Hasse di un reticolo, di un reticolo distributivo, di un'algebra di Boole:

(a) (b) (c) (d)

6. Sia $X=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, in modo che valga $|X|=8$. Verificare che la relazione binaria ρ in X, di grafico

$$\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(a,g),(a,h),(b,d),(b,e),(b,f),(b,g),(b,h),$$
$$(c,d),(c,e),(c,f),(c,g),(c,h),(d,e),(d,f),(d,g),(d,h),(e,f),(g,f)\}$$

è un ordinamento in X e disegnarne il diagramma di Hasse. Rispetto a questo ordinamento si indichino gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali di X. Se esistono, si calcolino $\sup\{b,c,h\}$, $\inf\{b,c,h\}$, $\sup\{b,e,h\}$, $\inf\{b,e,h\}$. Quali elementi di X sono confrontabili con ogni altro elemento di X? Infine si stabilisca se X, ordinato da ρ, è un insieme totalmente ordinato, un reticolo, un reticolo completo, un reticolo distributivo, un'algebra di Boole.

7. Si considerino le seguenti parti di $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Per ciascuna si stabilisca se essa, munita della relazione di inclusione, costituisce un insieme ordinato, un insieme totalmente ordinato, un reticolo, un reticolo completo, un reticolo distributivo, un'algebra di Boole, una sottoalgebra dell'algebra di Boole $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Se ne indichino inoltre, caso per caso, gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali.
a. $\mathcal{P}_f(\mathbb{Z})$ (cioè l'insieme delle parti finite di $\mathbb{Z}$);
b. $\mathcal{P}(\mathbb{Z})-\mathcal{P}_f(\mathbb{Z})$ (cioè l'insieme delle parti infinite di $\mathbb{Z}$);
c. $\mathcal{P}_f(\mathbb{Z})\cup\{X\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})\mid \mathbb{Z}-X \text{ è finito}\}$.
Cambia qualcosa, in questo esercizio, se si sostituisce a $\mathbb{Z}$ un qualsiasi insieme infinito?

8. Sia D l'insieme dei divisori positivi di 42, e sia $X=\{1,2,3\}$. Verificare che D, ordinato rispetto alla divisibilità, costituisce un'algebra di Boole. Disegnarne il diagramma di Hasse. Scrivere un isomorfismo di algebre di Boole da D a $\mathcal{P}(X)$. Quali sono gli insiemi Y tali che, come algebre di Boole, D e $\mathcal{P}(Y)$ siano isomorfi? L'insieme dei divisori positivi di 44, ordinato rispetto alla divisibilità, costituisce un'algebra di Boole? Indicare un numero naturale n diverso da 42 tale che l'insieme dei divisori positivi di n, sempre ordinato rispetto alla divisibilità, costituisca un'algebra di Boole isomorfa a X. È possibile scegliere n in modo che sia compreso tra 10 e 20?