

Algoritmi e Strutture Dati (Mod. A)

Limite Inferiore per l'Ordinamento

Limite Inferiore per l'Ordinamento

Ma quanto può essere efficiente, in principio, un algoritmo di ordinamento?

Questa è una delle domande più ambiziose e interessanti

ma anche una delle più difficili!

Limite Inferiore per l'Ordinamento

Ma quanto può essere efficiente, in principio, un algoritmo di ordinamento?

*La difficoltà risiede nel fatto che non ci stiamo chiedendo qual'è l'efficienza di uno specifico algoritmo di ordinamento ma qual'è il **minimo tempo di esecuzione** di un qualunque algoritmo di ordinamento.*

*La risposta richiede quindi di considerare **tutti i possibili algoritmi di ordinamento**, anche quelli mai implementati.*

Limite Inferiore per l'Ordinamento

In generale, per rispondere ad una domanda del tipo “qual'è il modo più veloce per eseguire un compito” dobbiamo definire prima

quali strumenti abbiamo a disposizione

La risposta infatti dipende in genere proprio da questo.

Limite Inferiore per l'Ordinamento

In generale, per rispondere ad una domanda del tipo “qual'è il modo più veloce per eseguire un compito” dobbiamo definire prima

quali strumenti abbiamo a disposizione

Nel caso dell'ordinamento considereremo come unico strumento

il confronto di elementi a coppie

Limite Inferiore per l'Ordinamento

Supponiamo di voler ordinare n elementi

$$***K_1, K_2, \dots, K_n***$$

Assumiamo che tutti gli elementi siano distinti

Questo significa che:

***per ogni coppia di elementi K_i e K_j , se $i \neq j$
allora***

- $K_i < K_j$ oppure***
- $K_i > K_j$***

Alberi di Decisione

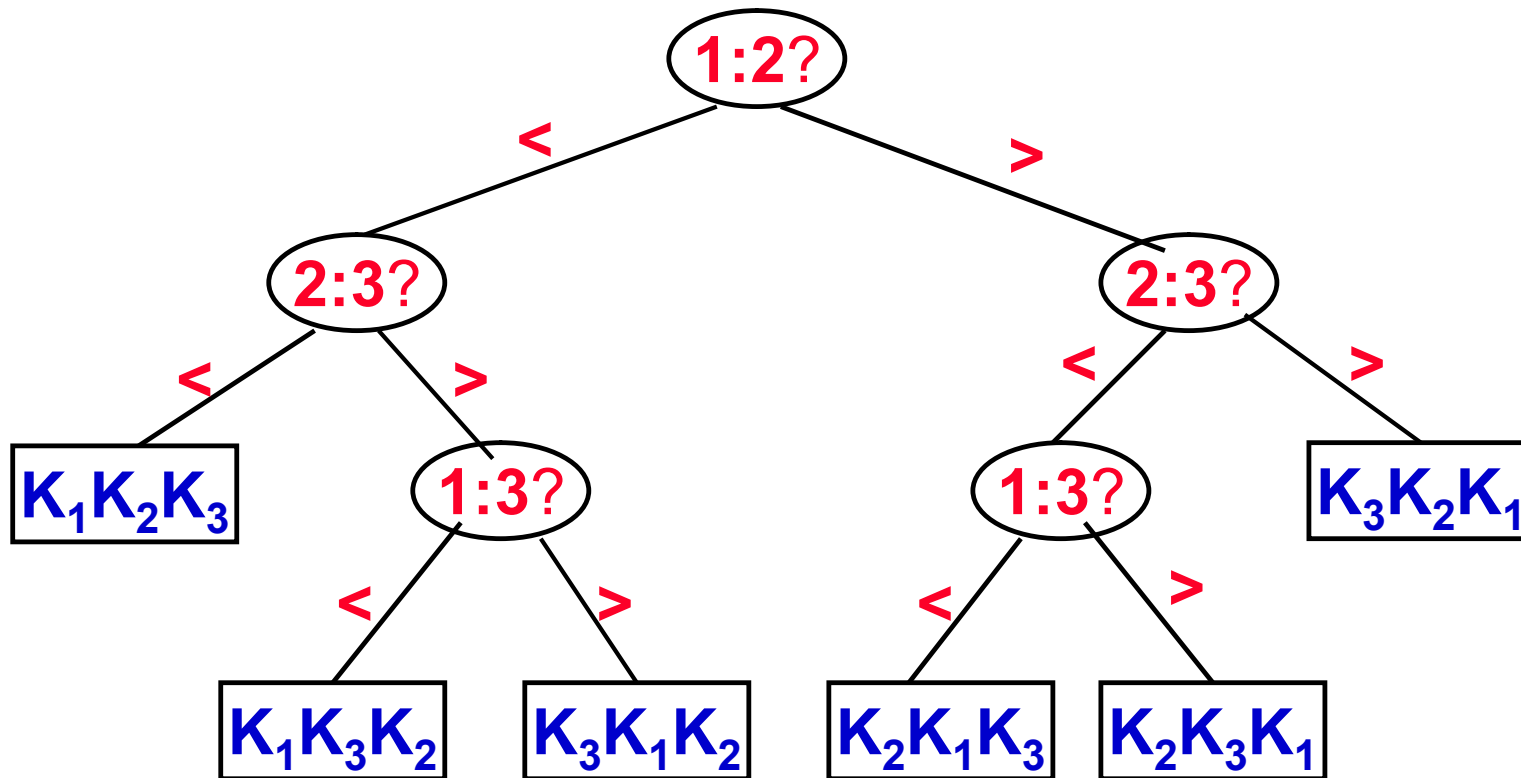
Per analizzare il problema che ci siamo posti, utilizzeremo come strumento teorico quello degli “Alberi di Decisione” (o *Alberi di Confronto*).

Gli Alberi di Decisione ci permettono di rappresentare un qualsiasi algoritmo di ordinamento basato su confronto di elementi

Alberi di Decisione: esempio

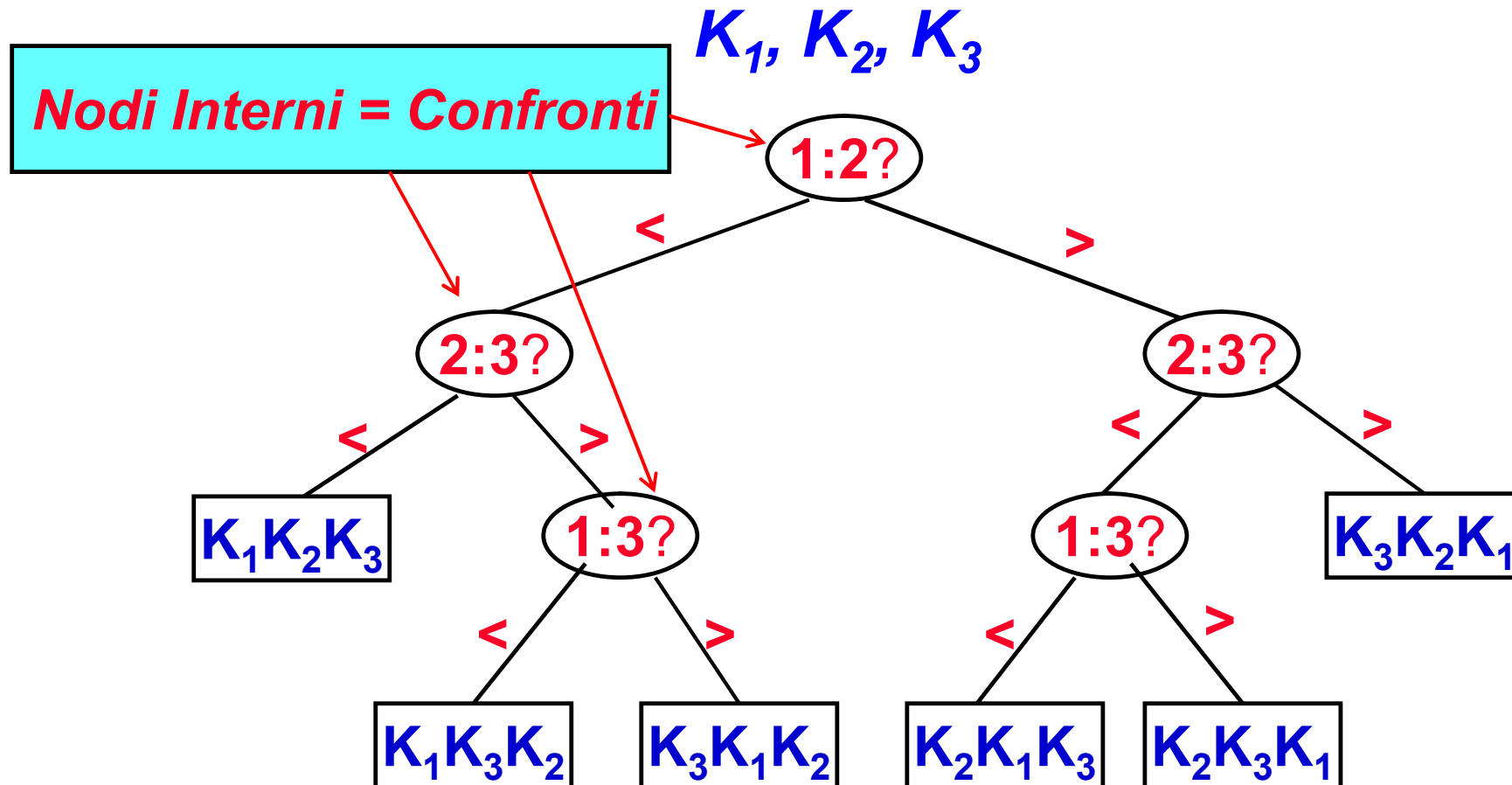
Siano dati tre elementi arbitrari:

K_1, K_2, K_3



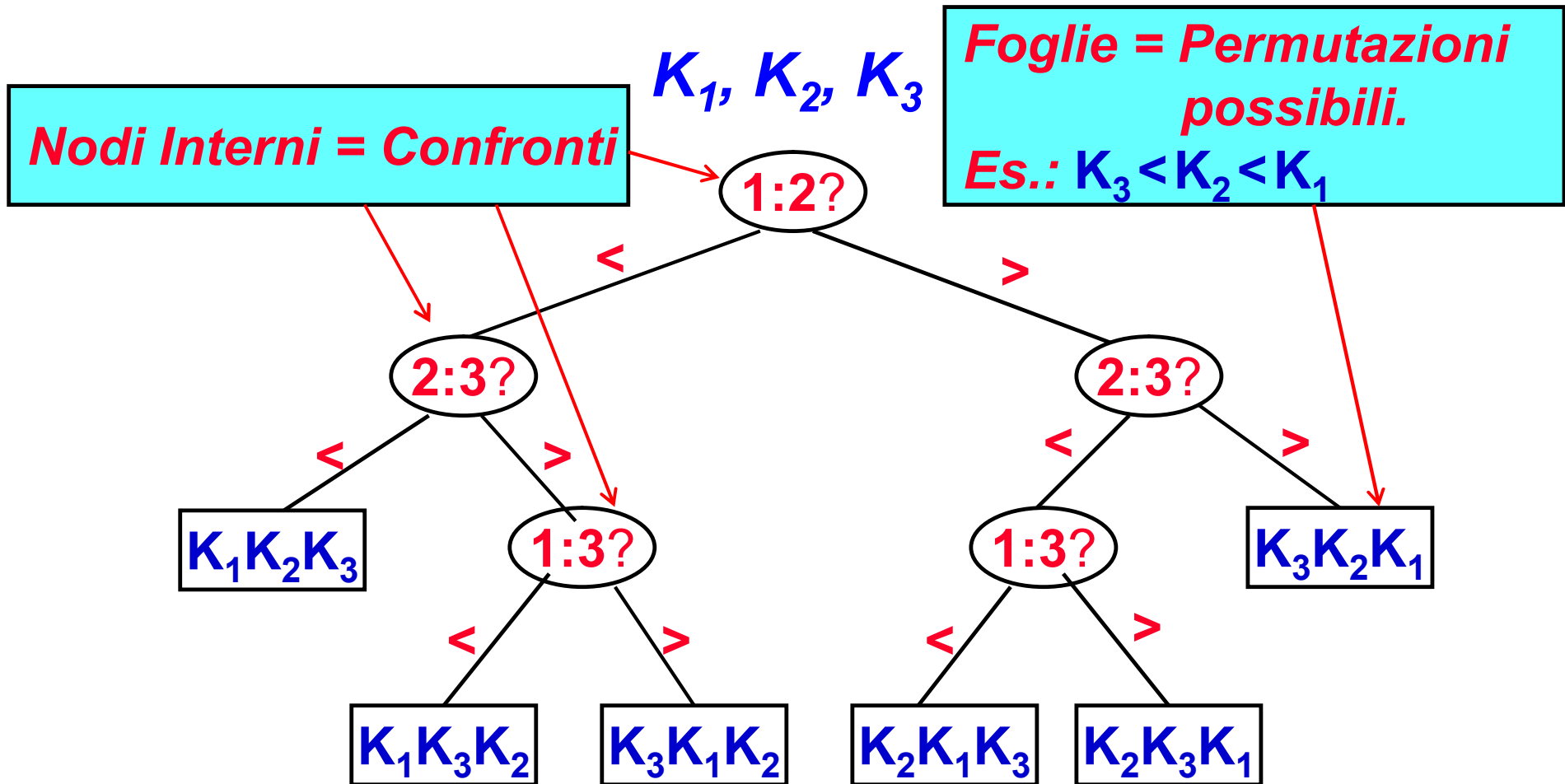
Alberi di Decisione: esempio

Siano dati tre elementi arbitrari:



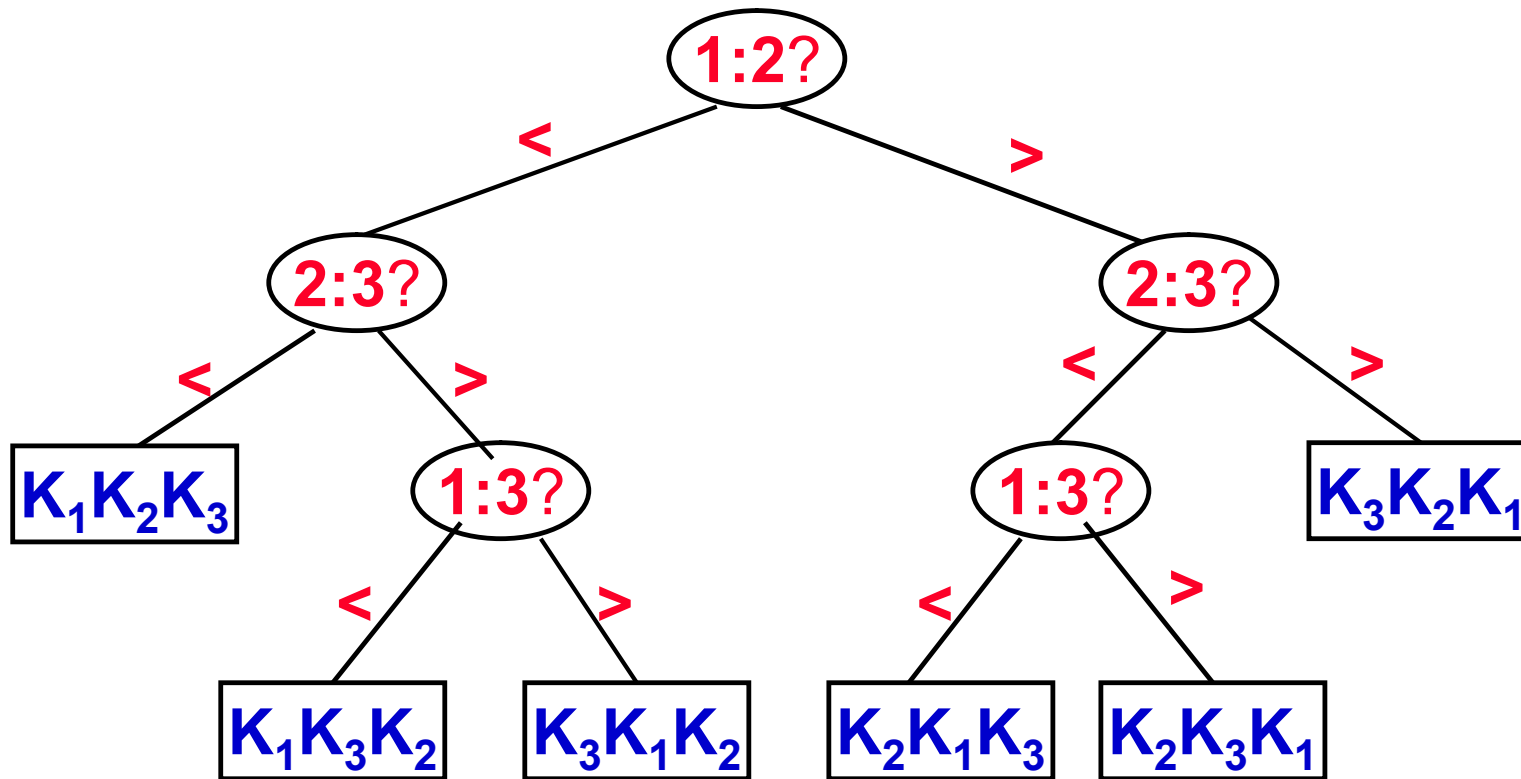
Alberi di Decisione: esempio

Siano dati tre elementi arbitrari:



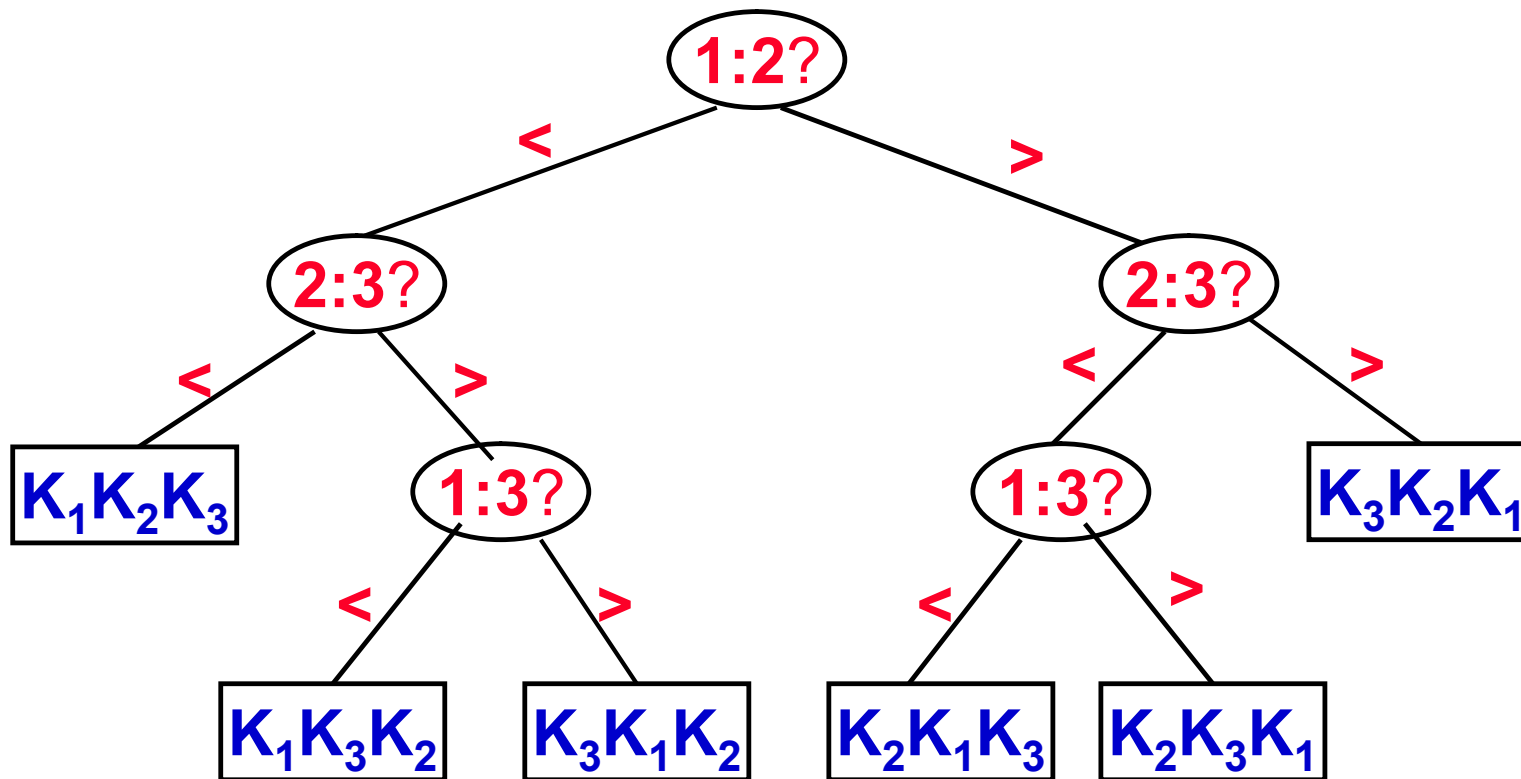
Alberi di Decisione

L'Albero di Decisione specifica la sequenza di confronti che l'algoritmo deve effettuare per ordinare 3 elementi.



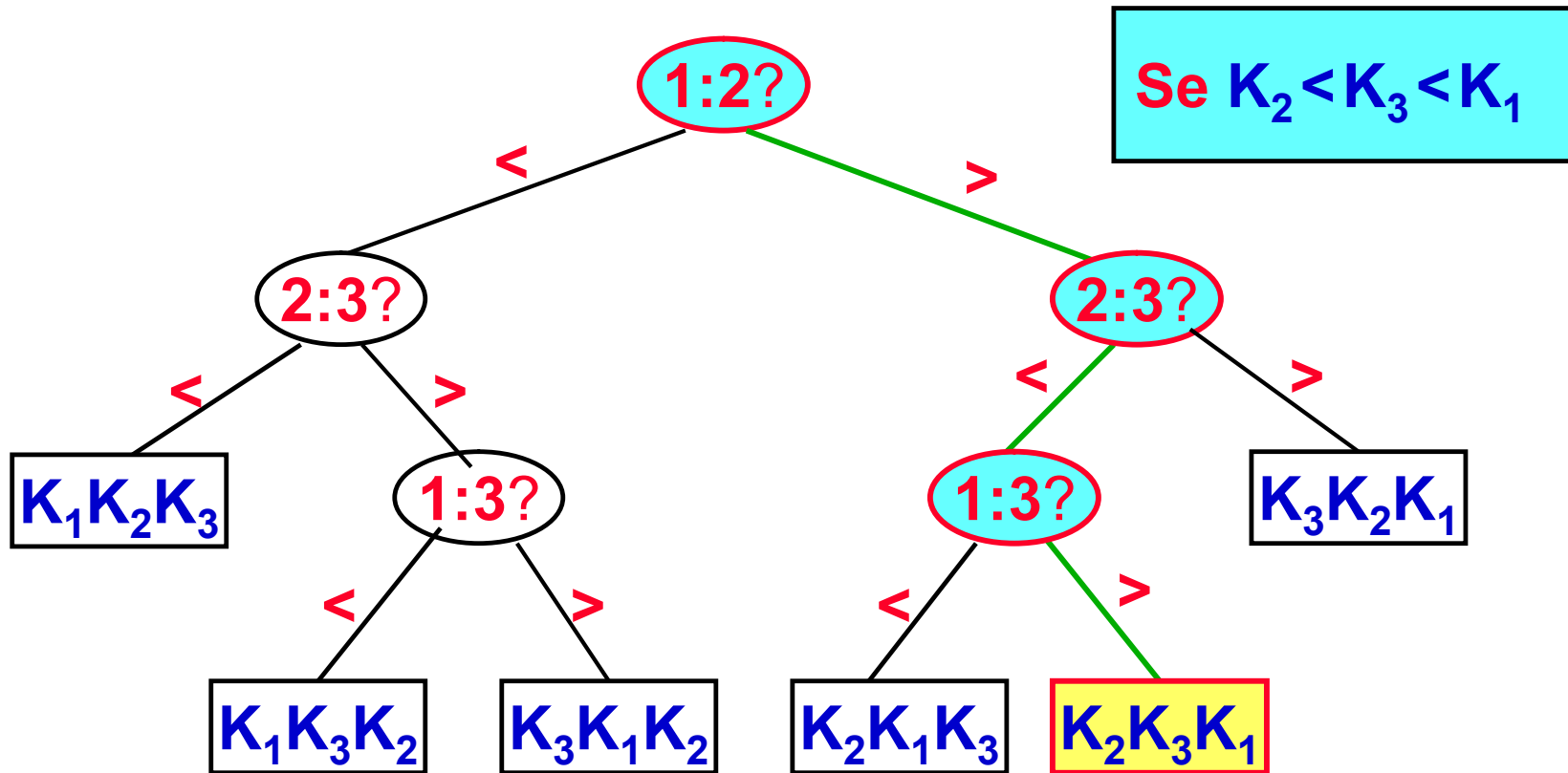
Alberi di Decisione

Un esecuzione dell'algoritmo per un dato input (di 3 elementi) corrisponde ad un percorso dalla radice ad una singola foglia.



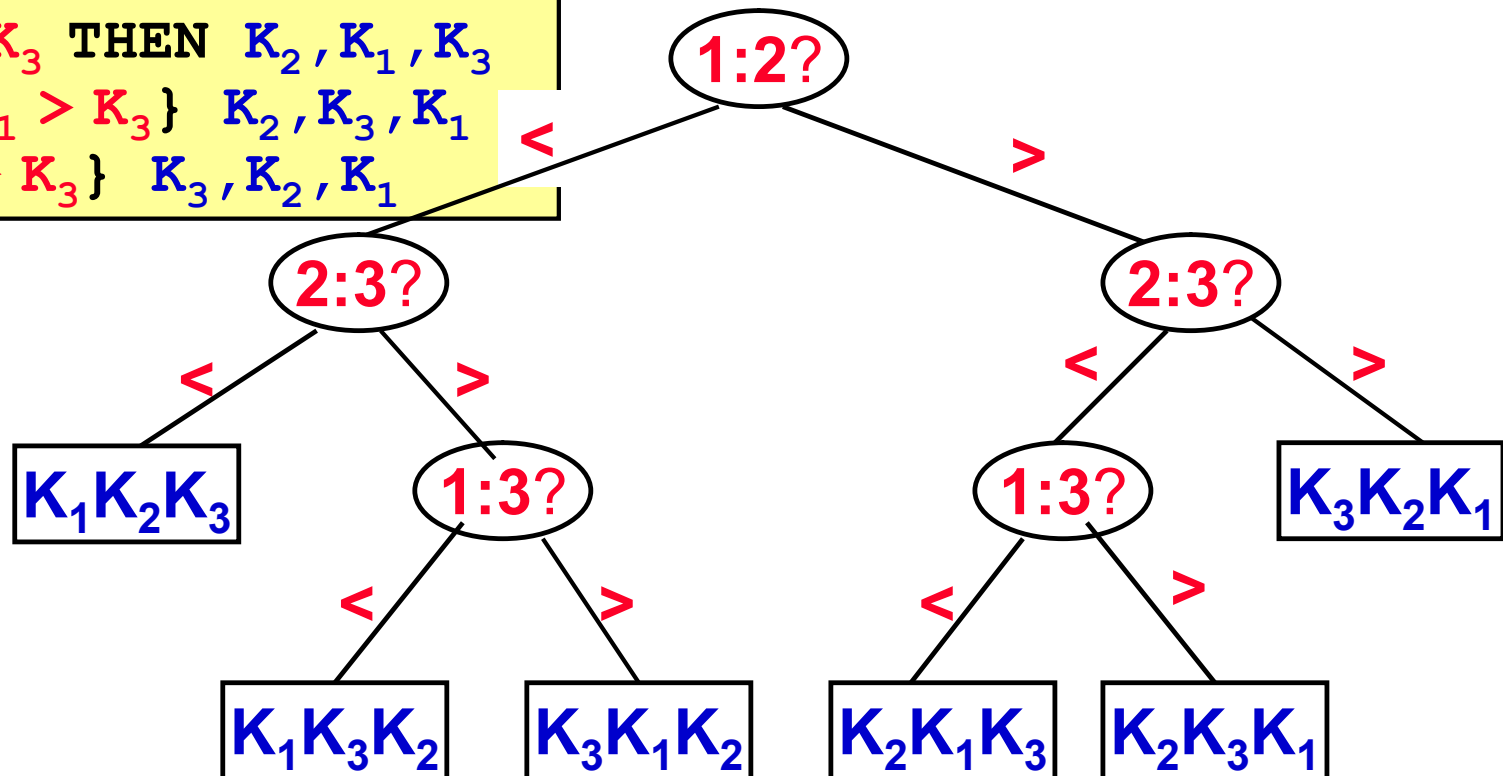
Alberi di Decisione: esempio

Un esecuzione dell'algoritmo per un dato input (di 3 elementi) corrisponde ad un percorso dalla radice ad una singola foglia.



Alberi di Decisione: algoritmo

```
IF  $K_1 < K_2$  THEN
  IF  $K_2 < K_3$  THEN  $K_1, K_2, K_3$ 
  ELSE  $\{K_2 > K_3\}$ 
    IF  $K_1 < K_3$  THEN  $K_1, K_3, K_2$ 
    ELSE  $\{K_1 > K_3\}$   $K_3, K_1, K_2$ 
ELSE  $\{K_1 > K_2\}$ 
  IF  $K_2 < K_3$  THEN
    IF  $K_1 < K_3$  THEN  $K_2, K_1, K_3$ 
    ELSE  $\{K_1 > K_3\}$   $K_2, K_3, K_1$ 
  ELSE  $\{K_2 > K_3\}$   $K_3, K_2, K_1$ 
```



Alberi di Decisione

Intuitivamente:

- ogni **foglia** corrisponde ad un possibile risultato dell'ordinamento di n elementi distinti.
- **i nodi interni** corrispondono ai confronti tra gli elementi:
 - se il risultato è $K_i < K_j$ allora il **sottoalbero sinistro** del nodo " $i:j$ " contiene il confronto successivo
 - se il risultato è $K_i > K_j$ allora il **sottoalbero destro** del nodo " $i:j$ " contiene il confronto successivo

finché non viene determinato l'ordine completo.

Alberi di Decisione

Un albero di decisione di ordine n è un albero binario tale che:

↪ ha $n!$ foglie, ciascuna etichettata con una diversa **permutazione** degli elementi

✂ i **nodi interni** hanno tutti **grado 2** e sono etichettati con coppie di indici “ $i:j$ ”, per $i,j = 1, \dots, n$

✂ in un percorso dalla radice ad una foglia etichettata “ $K_{i_1}, K_{i_2}, \dots, K_{i_n}$ ” compare **almeno**:

- o un nodo “ $i_j:i_{j+1}$ ”, e il percorso procede a sinistra del nodo;
- o un nodo “ $i_{j+1}:i_j$ ”, e il percorso procede a destra del nodo.

Alberi di Decisione

Notate che:

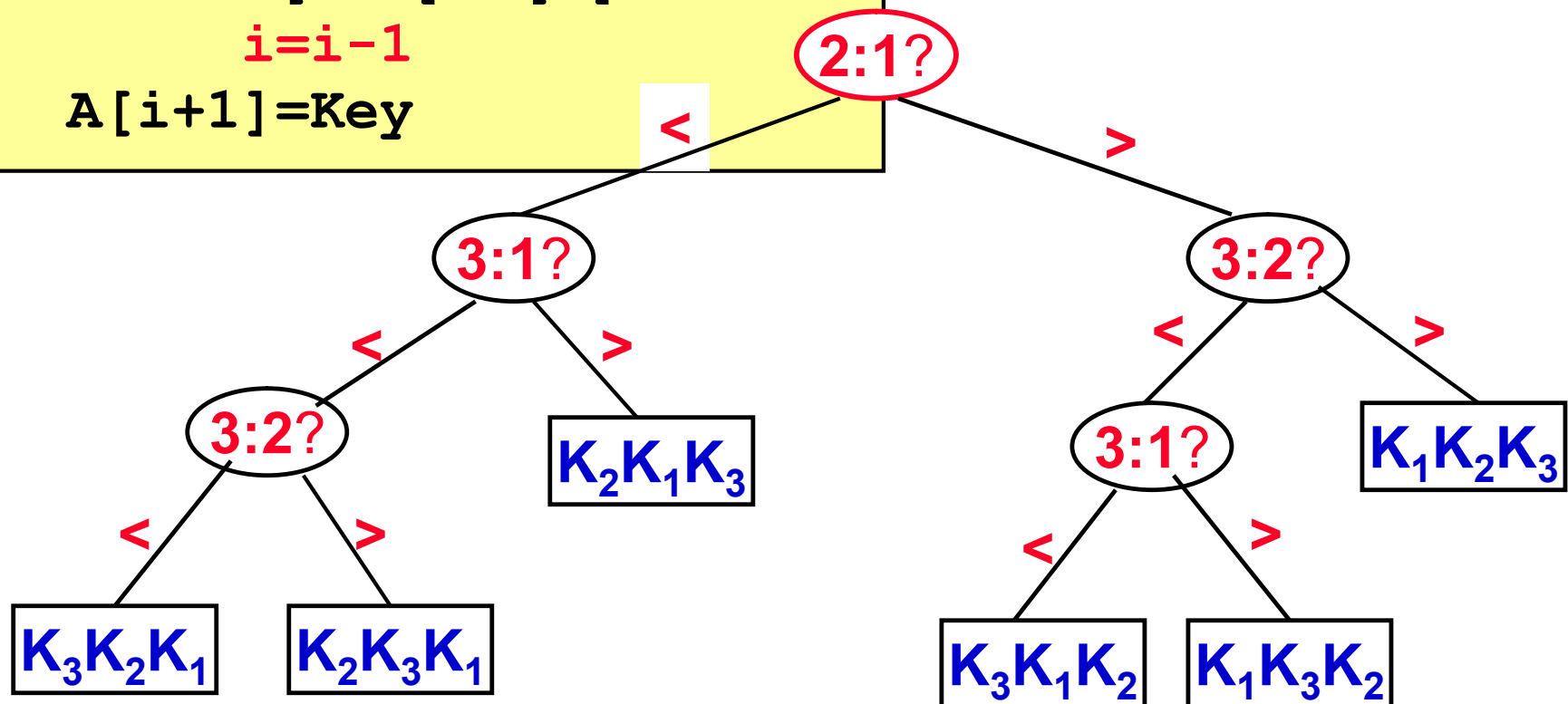
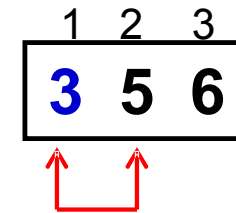
- *un albero di decisione di ordine n rappresenta tutte le possibili esecuzioni di un algoritmo di ordinamento con input di dimensione n*
- *ma ad ogni algoritmo di ordinamento differente corrisponde un differente albero di decisione.*

Albero di Decisione di Insert-Sort

```

Insert-Sort (A)
FOR j=2 to Length (A)
  DO Key:=A[j]
    i=j-1
    WHILE i>0 AND A[i]>Key
      DO A[i+1]=A[i]
        i=i-1
    A[i+1]=Key
  
```

$j=2$
 $i=1$



Albero di Decisione di Insert-Sort

```

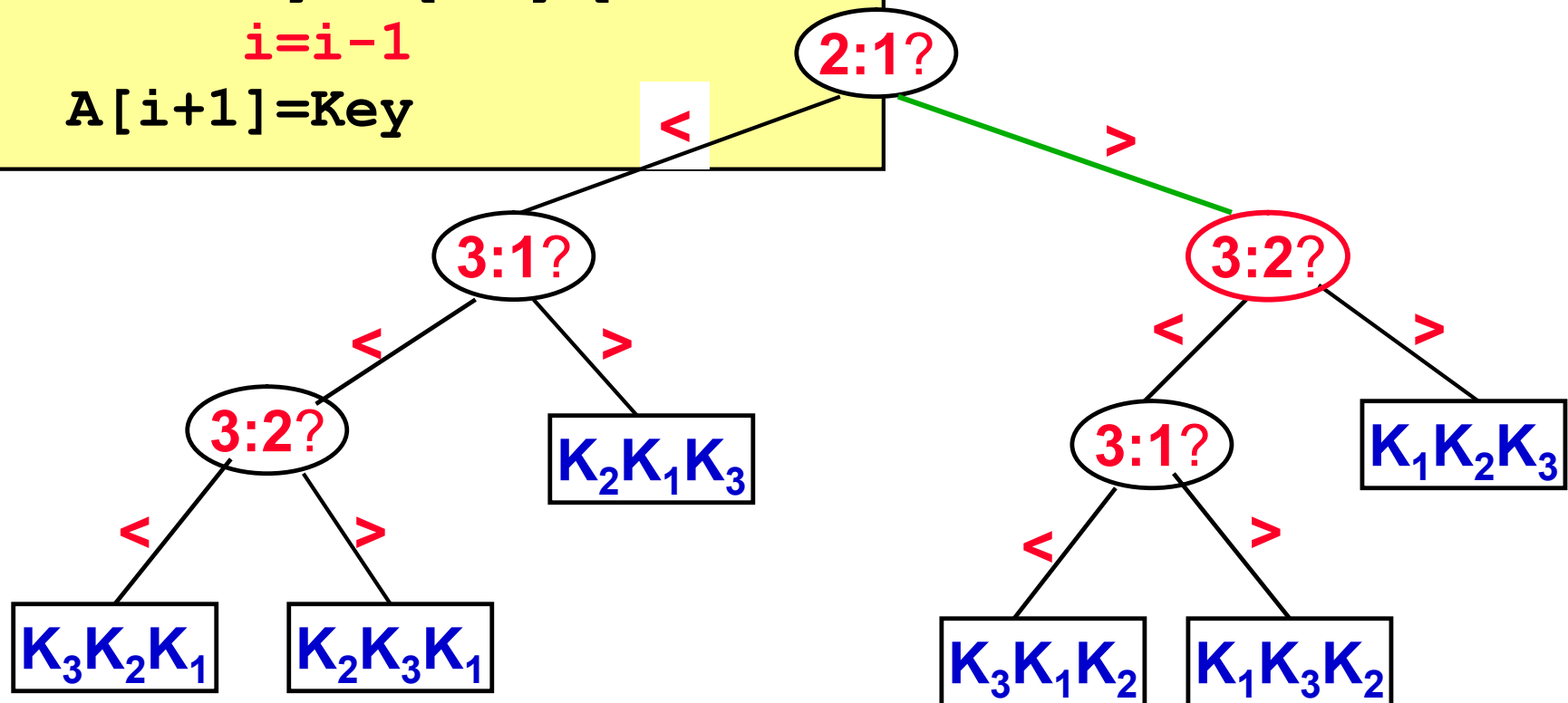
Insert-Sort (A)
FOR j=2 to Length(A)
  DO Key:=A[j]
    i=j-1
    WHILE i>0 AND A[i]>Key
      DO A[i+1]=A[i]
        i=i-1
    A[i+1]=Key
  
```

$j = 3$
 $i = 2$

1	2	3
3	5	6

1	2	3
3	5	6

↑ ↑



Albero di Decisione di Insert-Sort

```

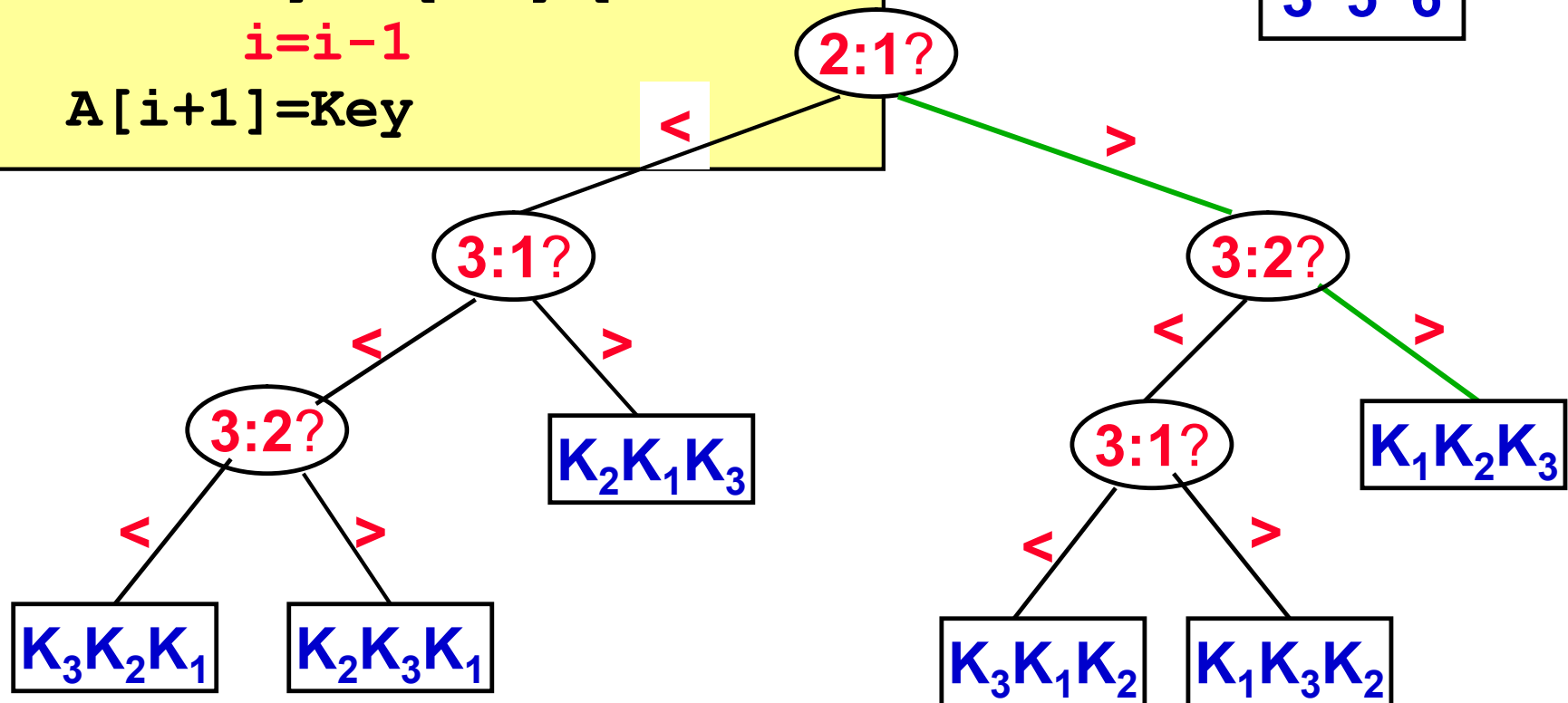
Insert-Sort (A)
FOR j=2 to Length(A)
  DO Key:=A[j]
    i=j-1
    WHILE i>0 AND A[i]>Key
      DO A[i+1]=A[i]
        i=i-1
    A[i+1]=Key
  
```

$j = 3$
 $i = 2$

1	2	3
3	5	6

1	2	3
3	5	6

1	2	3
3	5	6

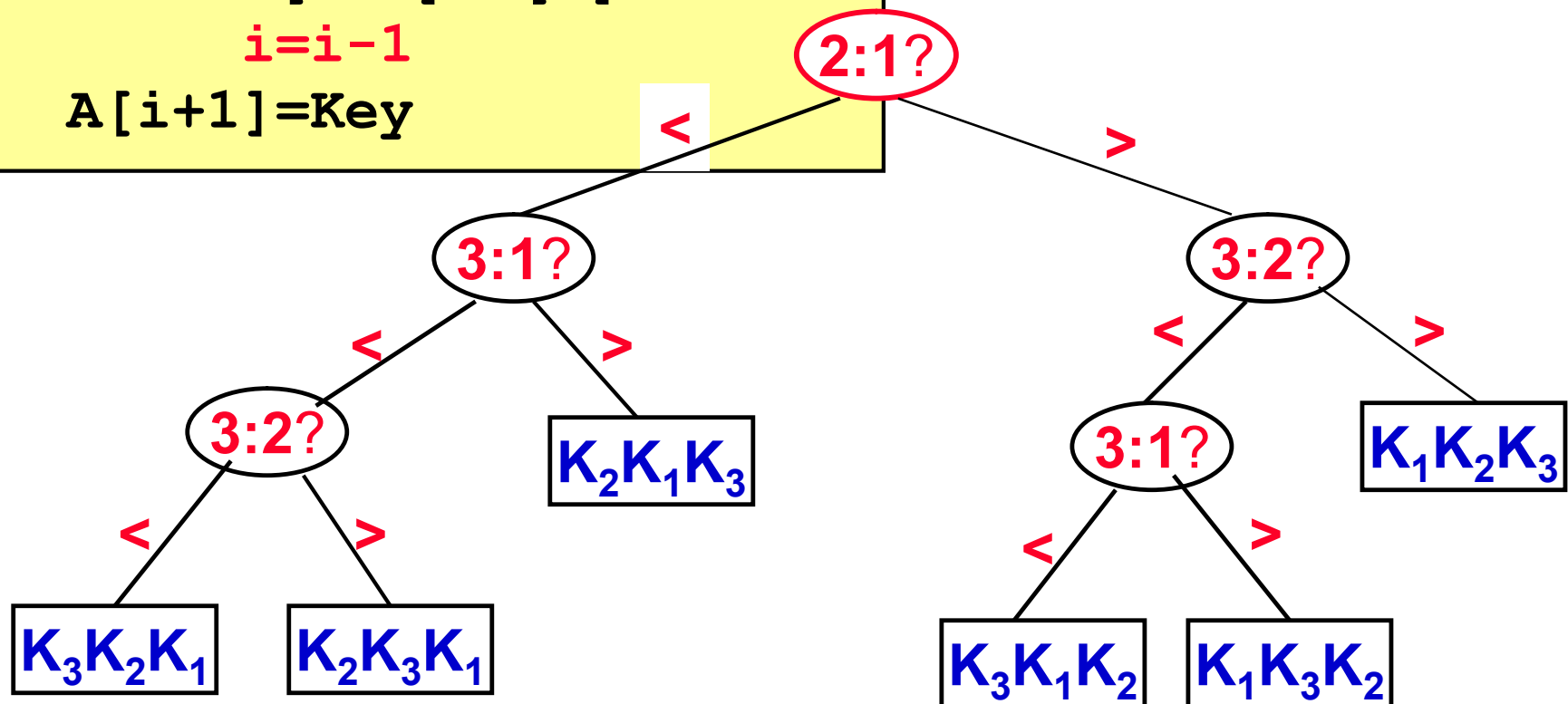
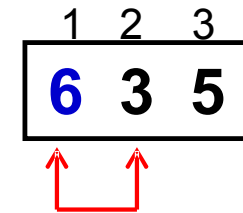


Albero di Decisione di Insert-Sort

```

Insert-Sort (A)
FOR j=2 to Length (A)
  DO Key:=A[j]
    i=j-1
    WHILE i>0 AND A[i]>Key
      DO A[i+1]=A[i]
        i=i-1
    A[i+1]=Key
  
```

$j = 2$
 $i = 1$



Albero di Decisione di Insert-Sort

```

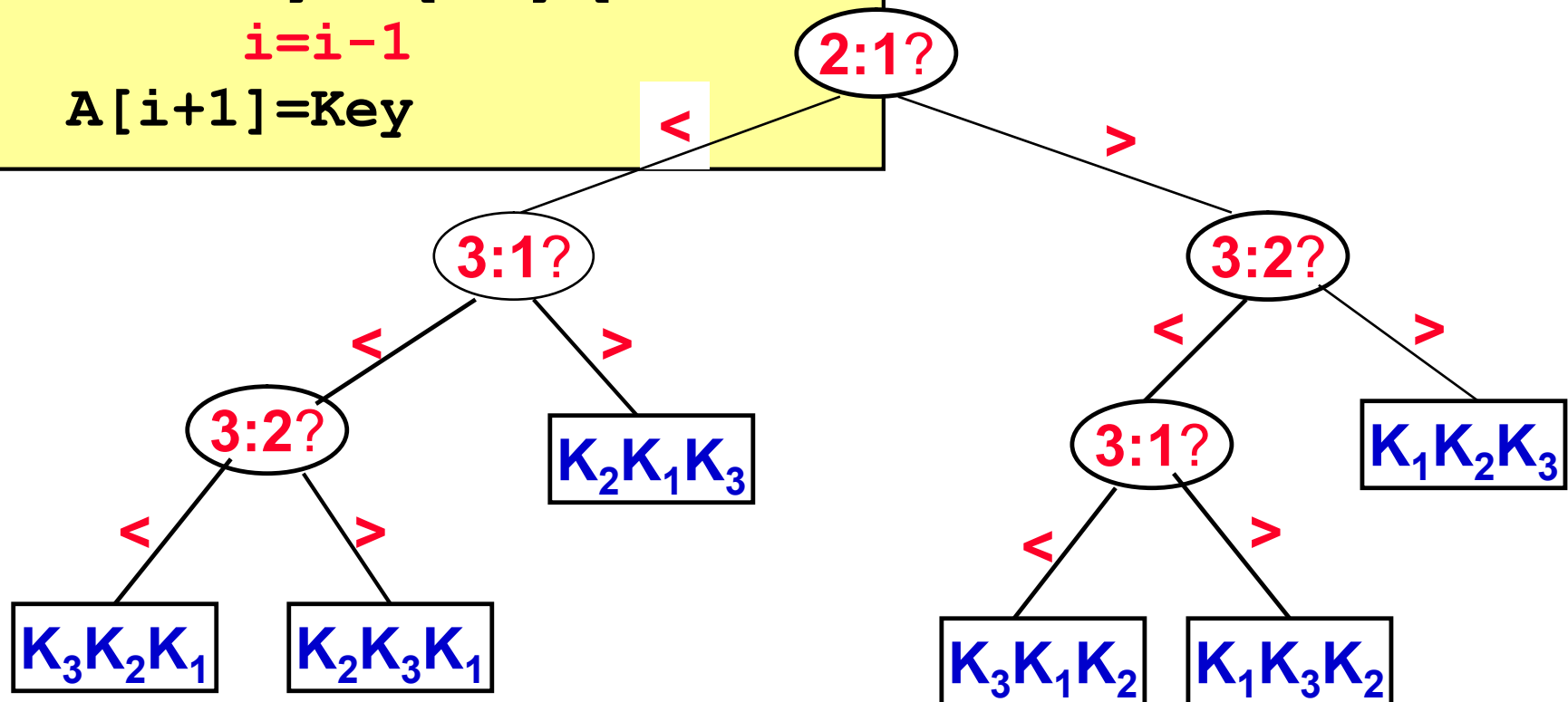
Insert-Sort (A)
FOR j=2 to Length (A)
  DO Key:=A[j]
    i=j-1
    WHILE i>0 AND A[i]>Key
      DO A[i+1]=A[i]
        i=i-1
    A[i+1]=Key
  
```

$j = 3$
 $i = 2$

1	2	3
6	3	5

1	2	3
3	6	5

↑ ↑

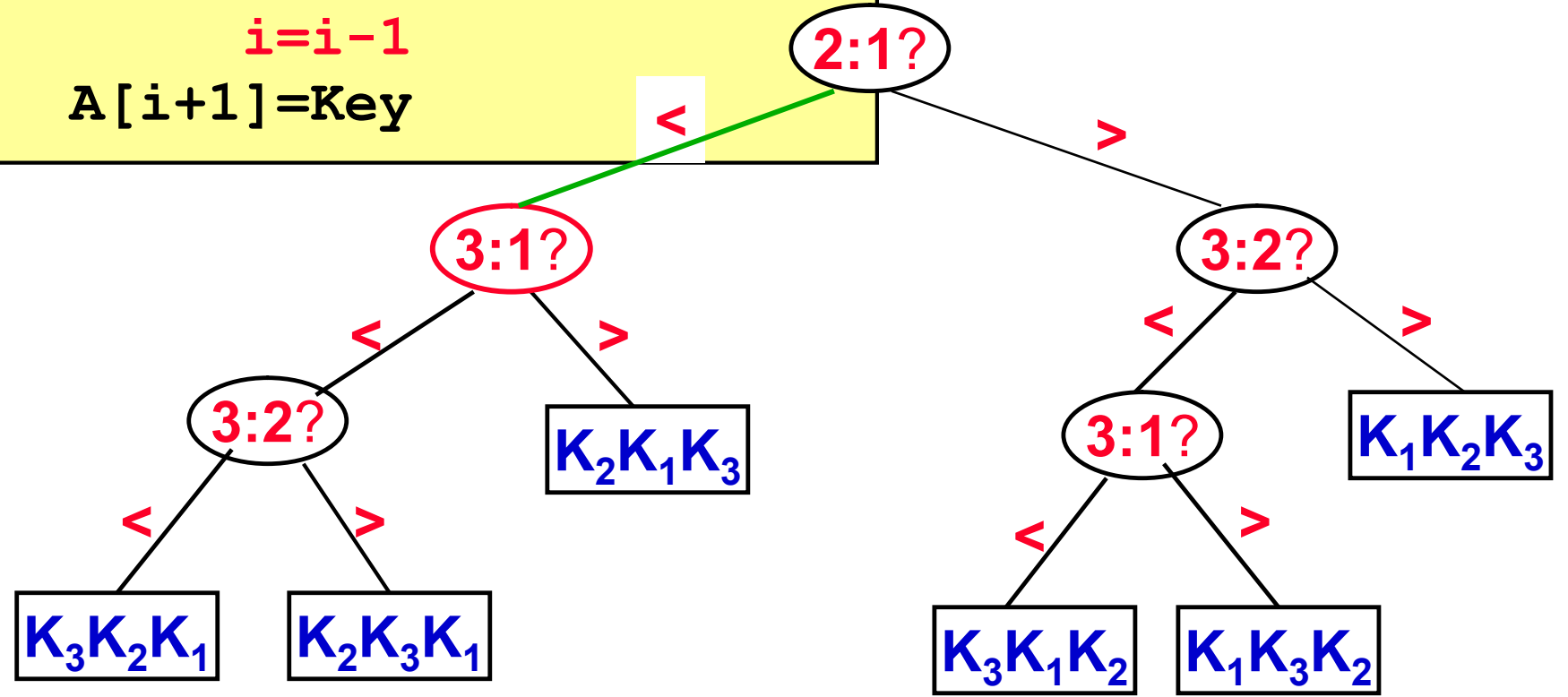
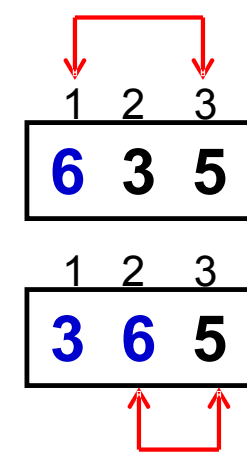


Albero di Decisione di Insert-Sort

```

Insert-Sort (A)
FOR j=2 to Length (A)
  DO Key:=A[j]
    i=j-1
    WHILE i>0 AND A[i]>Key
      DO A[i+1]=A[i]
        i=i-1
    A[i+1]=Key
  
```

$j = 3$
 $i = 2$



Albero di Decisione di Insert-Sort

```

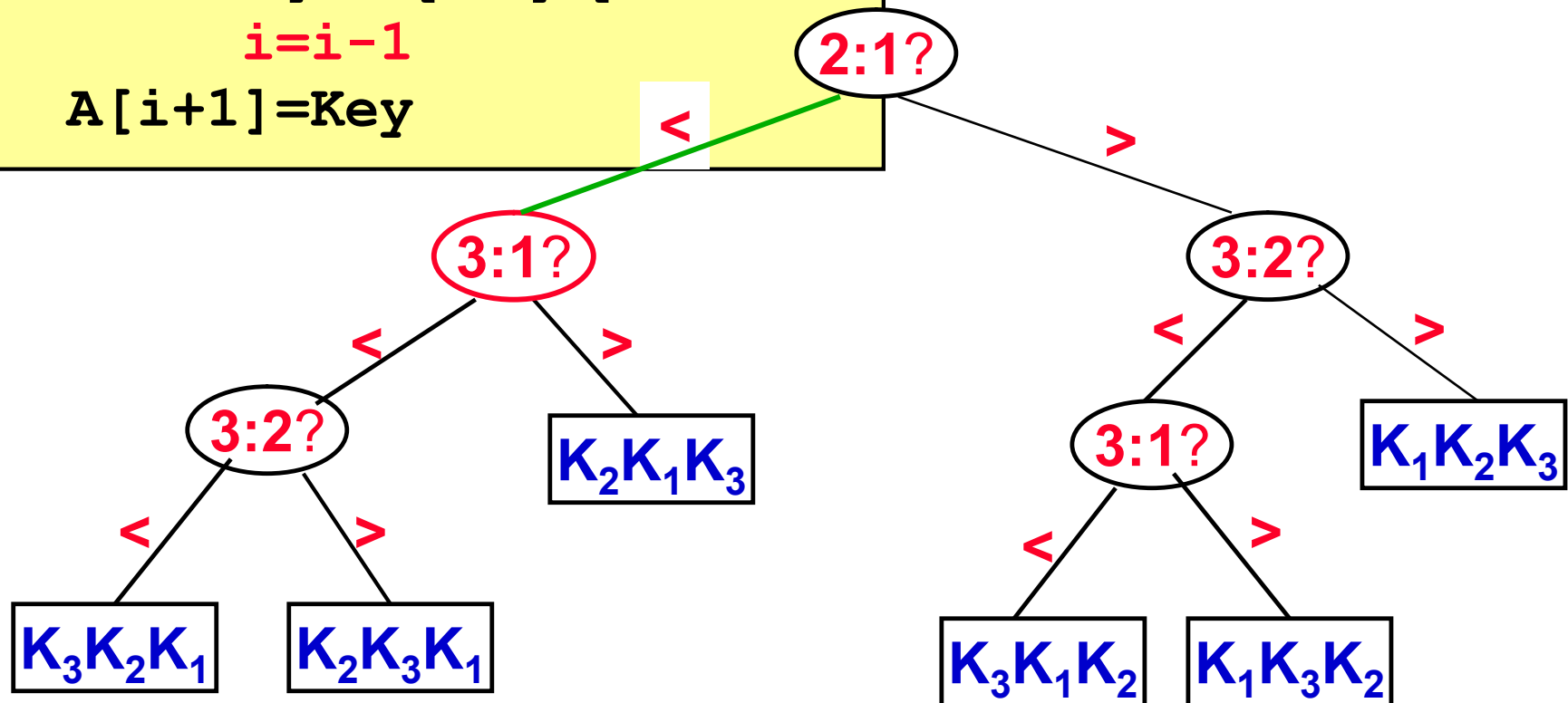
Insert-Sort (A)
FOR j=2 to Length (A)
  DO Key:=A[j]
    i=j-1
    WHILE i>0 AND A[i]>Key
      DO A[i+1]=A[i]
        i=i-1
    A[i+1]=Key
  
```

$j = 3$
 $i = 1$

1	2	3
6	3	5

1	2	3
3	6	5

↑ ↑

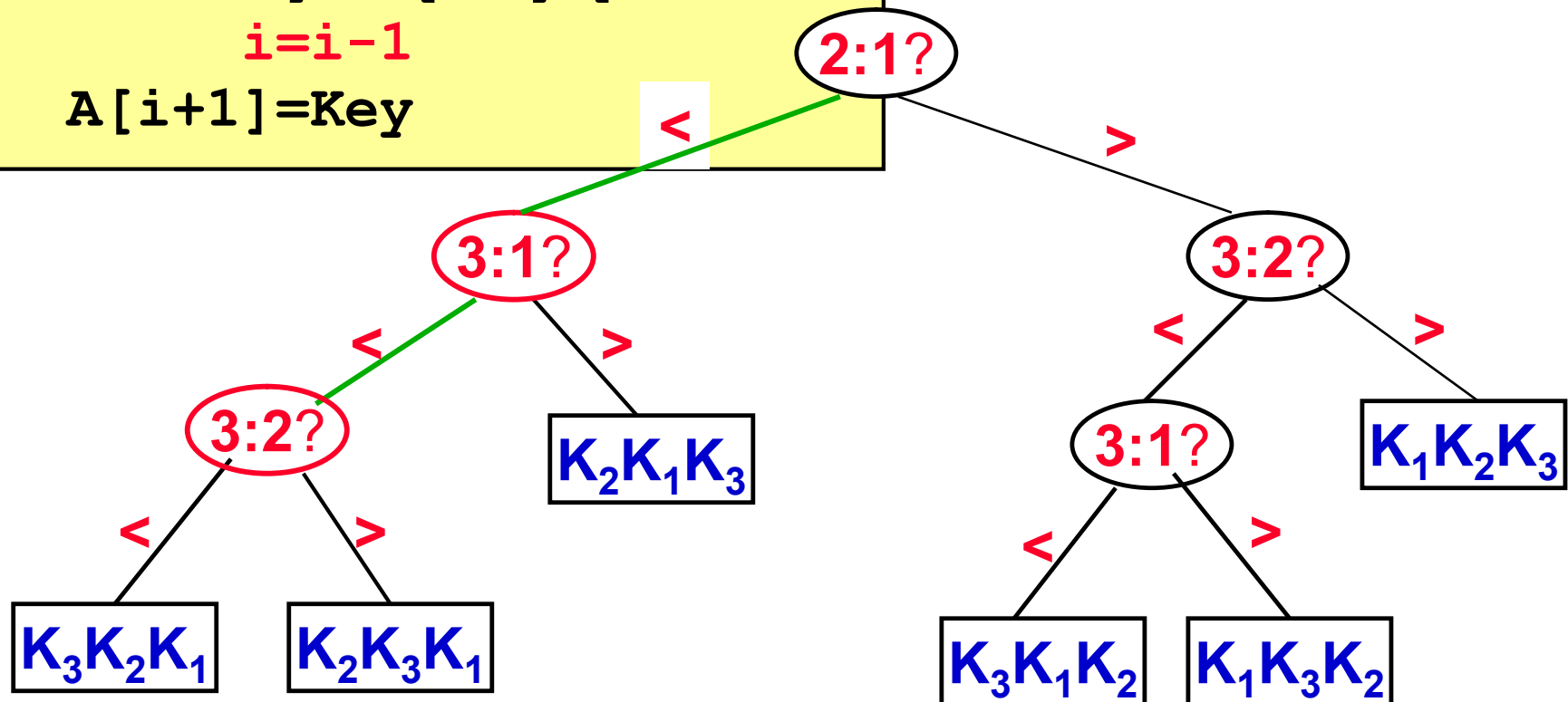
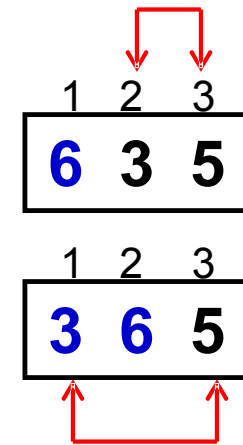


Albero di Decisione di Insert-Sort

```

Insert-Sort (A)
FOR j=2 to Length (A)
  DO Key:=A[j]
    i=j-1
    WHILE i>0 AND A[i]>Key
      DO A[i+1]=A[i]
        i=i-1
    A[i+1]=Key
  
```

$j = 3$
 $i = 1$



Albero di Decisione di Insert-Sort

```

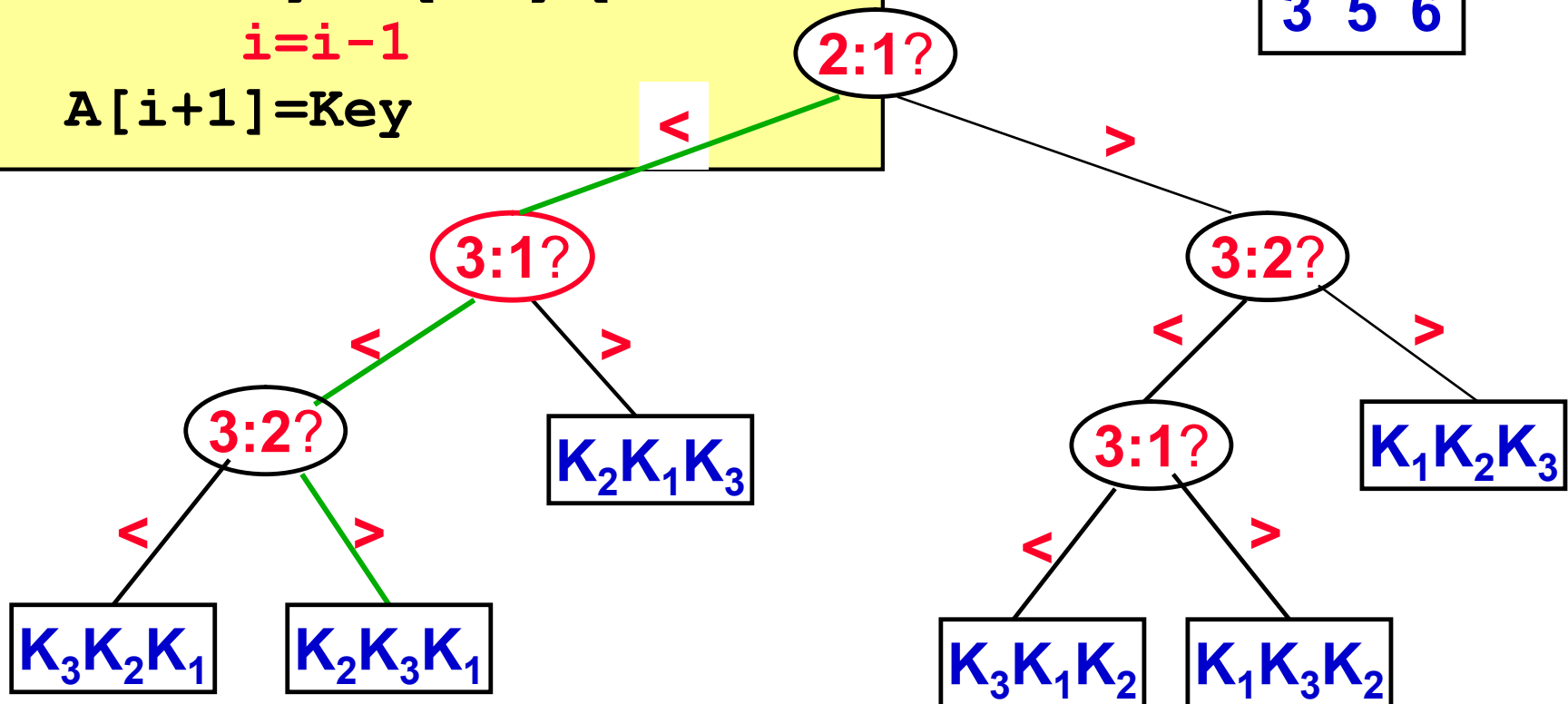
Insert-Sort (A)
FOR j=2 to Length(A)
  DO Key:=A[j]
    i=j-1
    WHILE i>0 AND A[i]>Key
      DO A[i+1]=A[i]
        i=i-1
    A[i+1]=Key
  
```

$j = 3$
 $i = 0$

1	2	3
6	3	5

1	2	3
3	6	5

1	2	3
3	5	6



Alberi di Decisione

É importante capire quindi che:

- *un nodo etichettato “**i:j**” nell’albero di decisione specifica un confronto tra gli elementi **K_i** e **K_j** secondo la loro posizione nell’**array iniziale***
- *e **NON** gli elementi che ad un certo punto dell’esecuzione compaiono nelle posizioni **i-esima** e **j-esima** dell’array*

- *gli alberi di decisione non menzionano alcuno spostamento degli elementi*

Limite Inferiore per il Caso Peggior

Teorema: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso peggiore

- Intuitivamente, il numero massimo di confronti che deve essere effettuato da un algoritmo di ordinamento sarà pari all'altezza del suo albero di decisione.***
- Il migliore algoritmo di decisione possibile, sarà quello il cui albero di decisione ha altezza minima tra tutti gli alberi di decisione possibili.***

Limite Inferiore per il Caso Peggior

Lemma: Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Ci sono $n!$ possibili permutazioni di n elementi, ognuna delle quali è un possibile ordinamento.

L'albero di decisione avrà quindi $n!$ foglie.

Limite Inferiore per il Caso Peggior

Lemma: Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

L'albero di decisione avrà quindi $n!$ foglie.

Ma ogni albero binario di altezza h ha non più di 2^h foglie.

Quindi deve essere: $n! \leq 2^h$

Limite Inferiore per il Caso Peggior

Lemma: Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Quindi deve essere: $n! \leq 2^h$

Prendendo il logaritmo di entrambi i membri, poiché entrambi sono funzioni crescenti monotone, otteniamo:

$$\log n! \leq h$$

Limite Inferiore per il Caso Peggior

Lemma: Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Quindi deve essere: $\log n! \leq h$

Per l'approssimazione di Stirling abbiamo che:

$$n! > \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

$$e = 2.71828\dots$$

Limite Inferiore per il Caso Peggior

Lemma: Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Quindi deve essere: $\log n! \leq h$

Otteniamo che

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$h \geq \log \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Limite Inferiore per il Caso Peggior

Lemma: Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Otteniamo che

$$h \geq \log \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

$$\geq n \log \frac{n}{e}$$

$$n! > \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

Limite Inferiore per il Caso Peggior

Lemma: Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Otteniamo che

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$h \geq \log \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\geq n \log \frac{n}{e}$$

$$\geq n \log n - n \log e$$

Limite Inferiore per il Caso Peggior

Lemma: Ogni albero di decisione che ordina n elementi ha altezza $\Omega(n \log n)$

Sia T un albero di decisione di altezza h che ordina n elementi.

Otteniamo che

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$h \geq \log \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\geq n \log \frac{n}{e}$$

$$\geq n \log n - n \log e$$

$$= \Omega(n \log n)$$

Limite Inferiore per il Caso Peggior

Corollario: HeapSort e MergeSort sono algoritmi di ordinamento per confronto asintoticamente ottimi nel caso peggiore.

Limite Inferiore per il Caso Peggior

Corollario: HeapSort e MergeSort sono algoritmi di ordinamento per confronto asintoticamente ottimi nel caso peggiore.

Abbiamo già calcolato che il limite superiore del tempo di esecuzione nel caso peggiore di entrambi gli algoritmi è $O(n \log n)$.

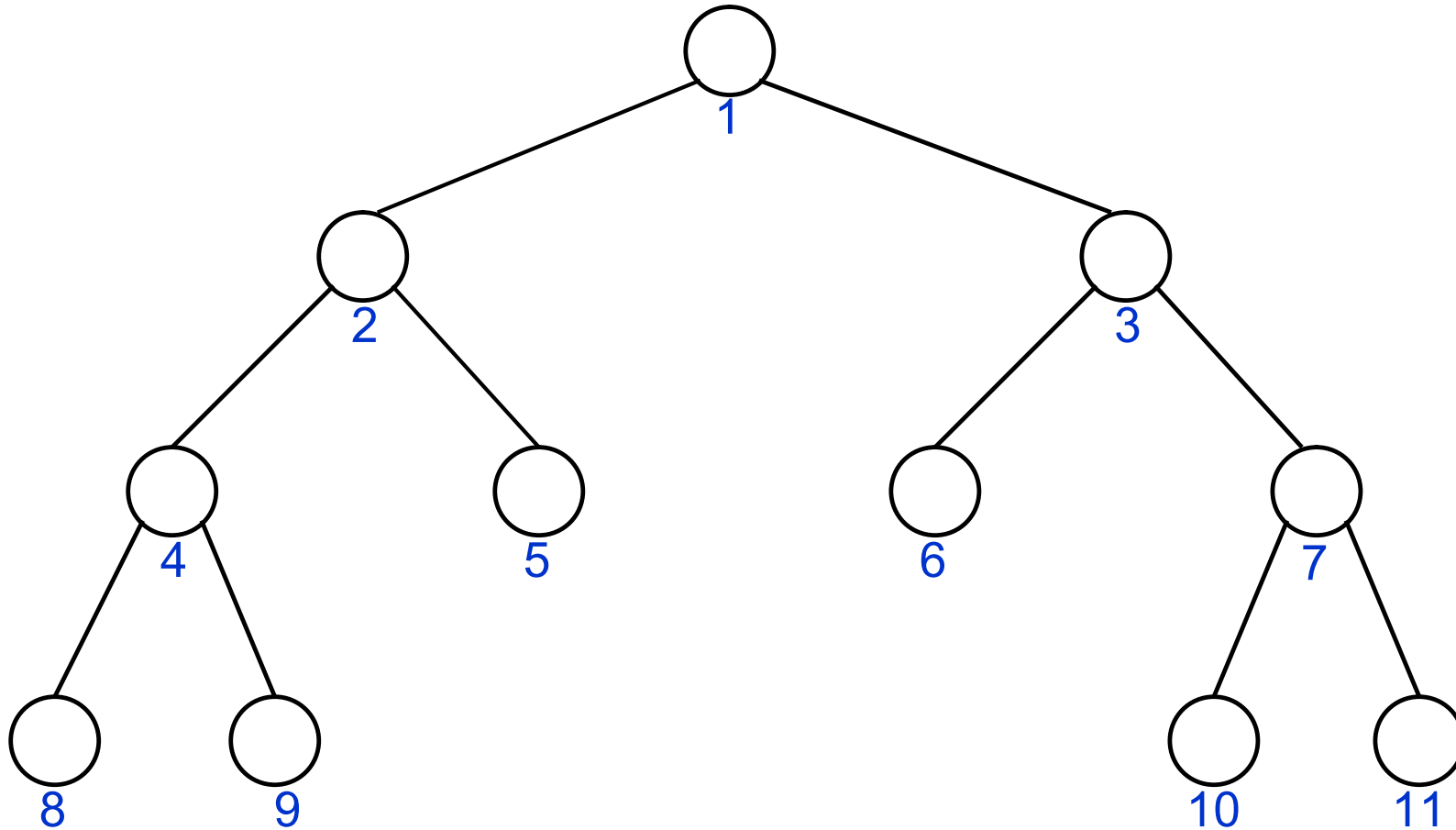
Ma questo limite corrisponde esattamente a limite inferiore $\Omega(n \log n)$ appena calcolato per il caso peggiore.

Da queste due osservazioni segue il corollario!

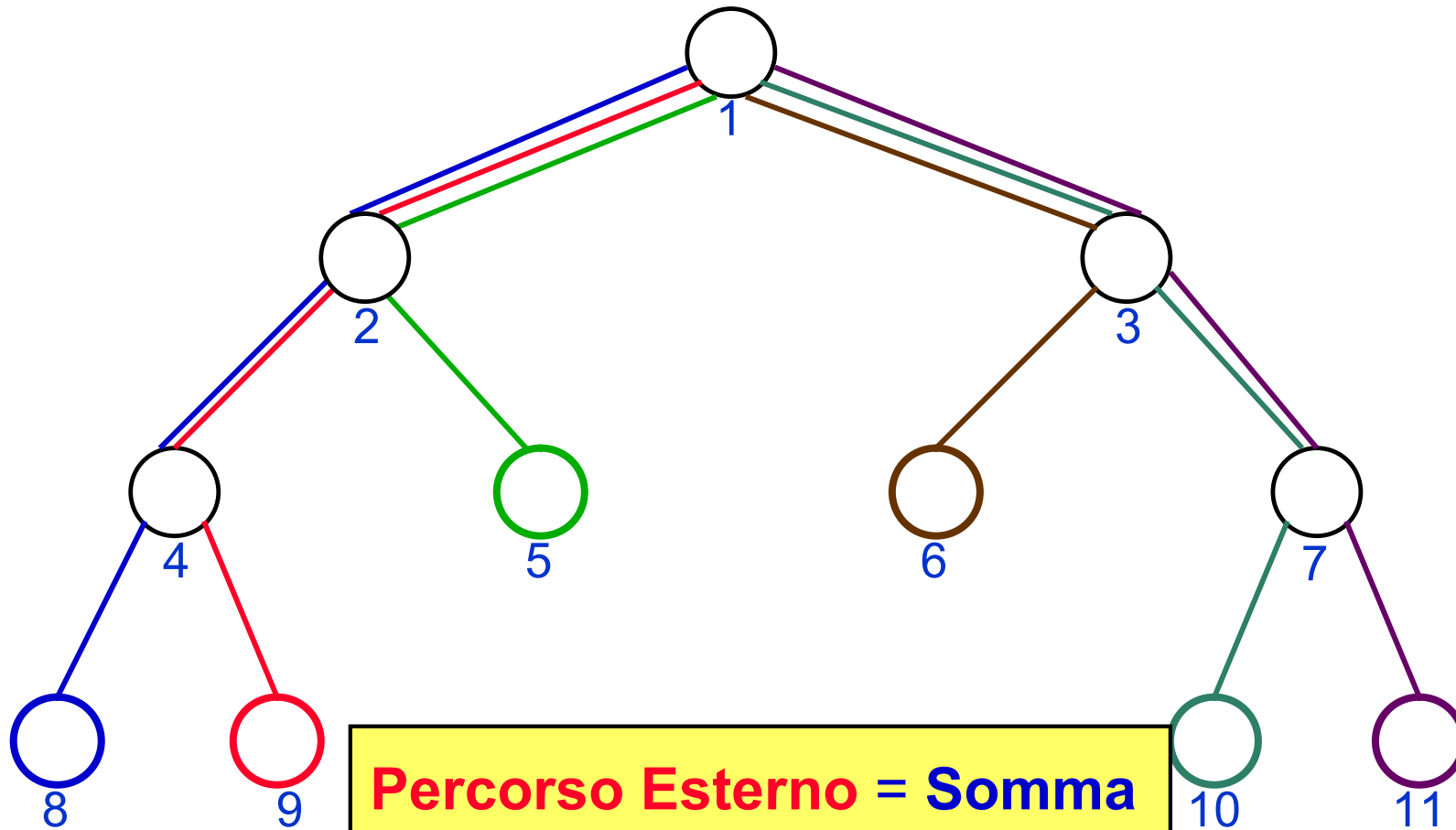
Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio

Percorso Esterno di un Albero Binario

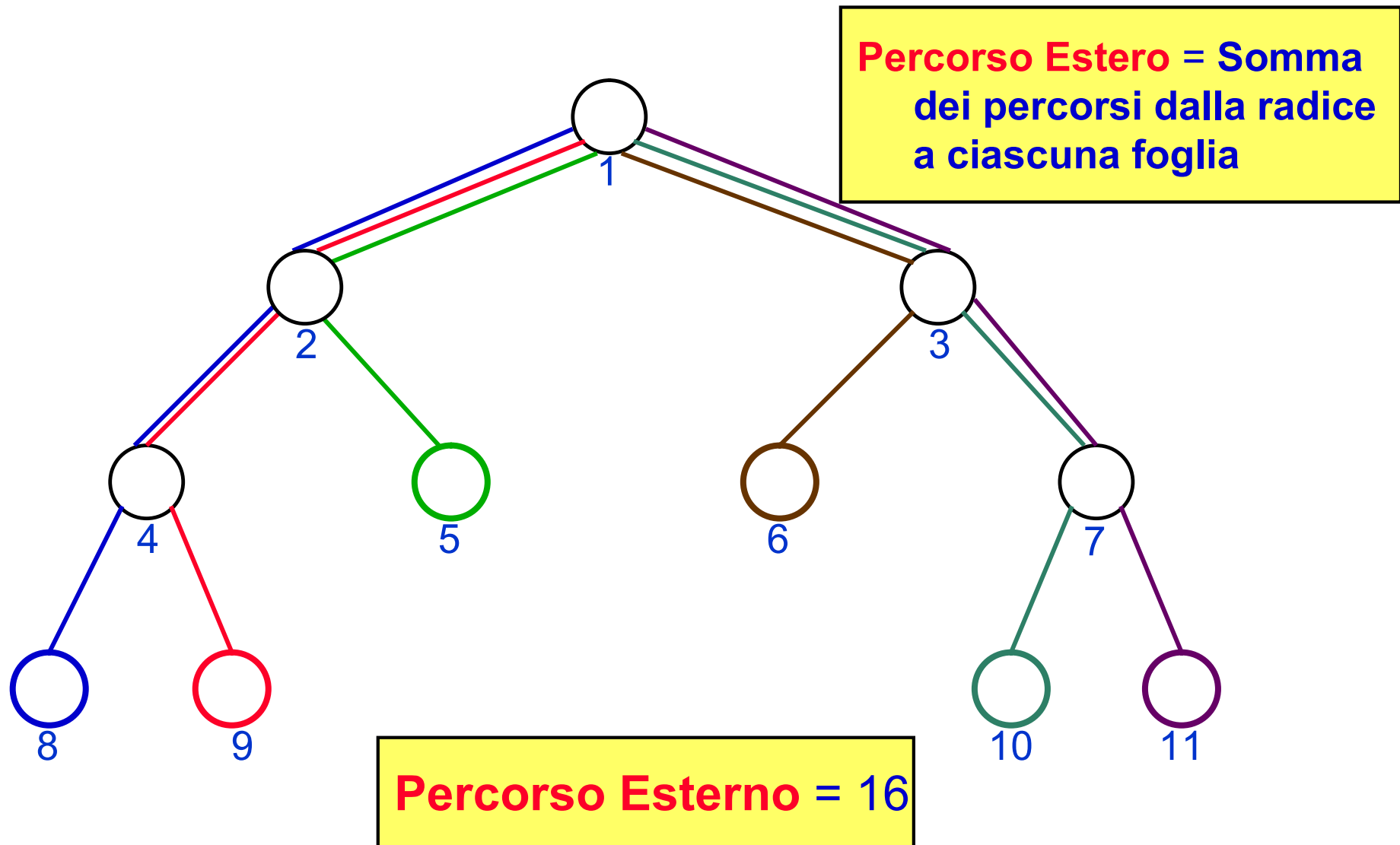


Percorso Esterno di un Albero Binario

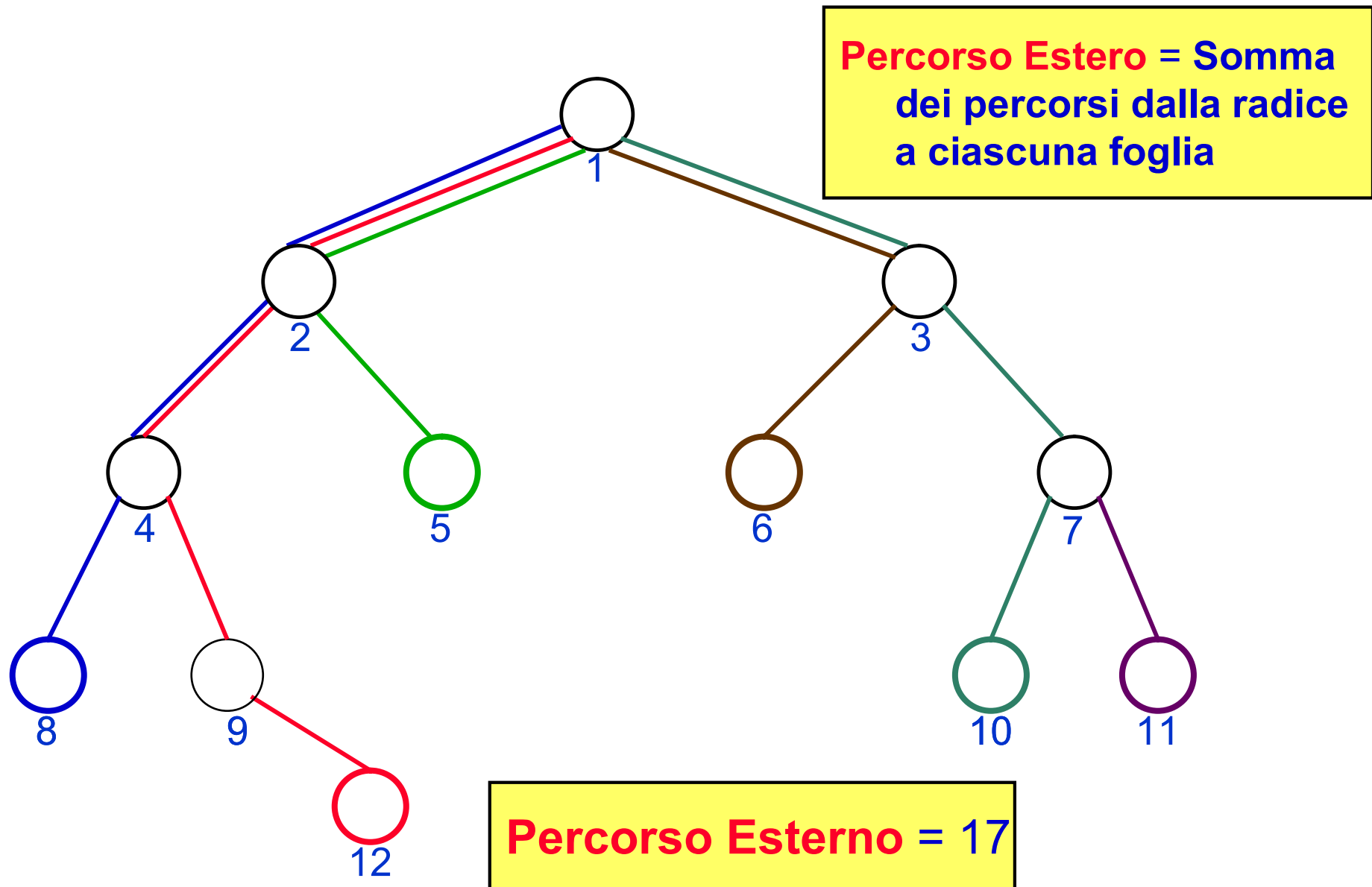


**Percorso Esterno = Somma
dei percorsi dalla radice
a ciascuna foglia**

Percorso Esterno di un Albero Binario



Percorso Esterno di un Albero Binario



Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio

- *Assumiamo che ogni permutazione iniziale di elementi in input abbia uguale probabilità.*
- *Consideriamo un albero di decisione di ordine n*
- *Il minimo numero medio di confronti necessari per l'algoritmo di ordinamento è quindi pari alla lunghezza del percorso esterno diviso per il numero di foglie dell'albero.*

Limite Inferiore per il Caso Medio

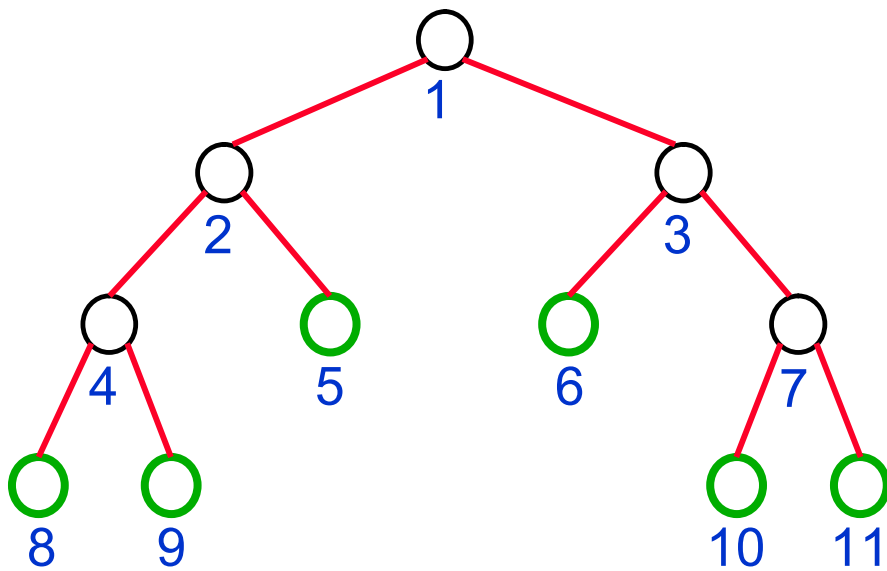
Teorema: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio

Il minimo numero medio di confronti è pari alla lunghezza del percorso esterno diviso per il numero di foglie dell'albero.

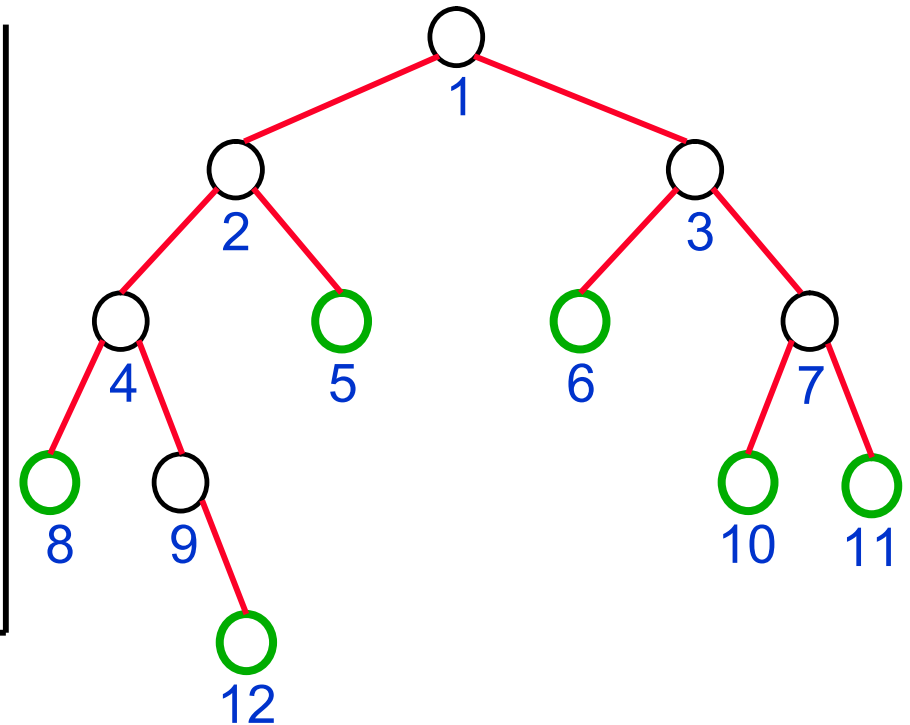
FATTO: L'albero che minimizza il percorso esterno è quello in cui tutte le n foglie occorrono al più sui due livelli h e $h - 1$, per qualche h .

Percorso Esterno Minimo

FATTO: L'albero che minimizza il percorso esterno è quello in cui tutte le n foglie occorrono al più sui due livelli h e $h-1$, per qualche h .



Percorso Estero = k



Percorso Estero = $k-h+(h+1)=k+1$

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio

Il minimo numero medio di confronti è pari alla lunghezza del percorso esterno diviso per il numero di foglie dell'albero.

FATTO: L'albero che minimizza il percorso esterno è quello in cui tutte le n foglie occorrono al più sui due livelli h e $h - 1$, per qualche h .

Siano N_h e N_{h-1} il numero di foglie ai livelli h e $h - 1$

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio

Il minimo numero medio di confronti è pari alla lunghezza del percorso esterno diviso per il numero di foglie dell'albero.

Siano N_h e N_{h-1} il numero di foglie ai livelli h e $h-1$

Il numero medio di confronti nell'albero sarà quindi

$$C_n = [(h-1)N_{h-1} + hN_h] / n!$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio

Siano N_h e N_{h-1} il numero di foglie ai livelli h e $h-1$

Il numero medio di confronti nell'albero sarà quindi

$$C_n = [(h-1)N_{h-1} + hN_h] / n!$$

Ma sappiamo anche che

$$N_{h-1} + N_h = n!$$

e

$$2N_{h-1} + N_h = 2^h$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio

Siano N_h e N_{h-1} il numero di foglie ai livelli h e $h-1$

Il numero medio di confronti
quindi

$$C_n = [(h-1) N_{h-1} +$$

Ma sappiamo anche che

$$N_{h-1} + N_h = n!$$

e

$$2N_{h-1} + N_h = 2^h$$

Poichè un albero completo alto h ha 2^h foglie e ogni nodo interno ha grado due (cioè ha 2 figli)

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio

Siano N_h e N_{h-1} il numero di foglie ai livelli h e $h-1$

Il numero medio di confronti nell'albero sarà quindi

$$C_n = [(h-1)N_{h-1} + hN_h] / n!$$

Quindi:

$$N_h = 2n! - 2^h$$

$$N_{h-1} = 2^h - n!$$

$$N_{h-1} + N_h = n!$$

$$2N_{h-1} + N_h = 2^h$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio

Il numero medio di confronti nell'albero sarà quindi

$$C_n = [(h-1)N_{h-1} + hN_h] / n!$$

Quindi:

$$N_h = 2n! - 2^h$$

$$N_{h-1} = 2^h - n!$$

Sostituendo:

$$C_n = (h n! + n! - 2^h) / n!$$

$$N_{h-1} + N_h = n!$$

$$2N_{h-1} + N_h = 2^h$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio

Sostituendo: $C_n = (h n! + n! - 2^h) / n!$

Ma $h = \lceil \log n! \rceil = \log n! + \varepsilon$ per $0 \leq \varepsilon < 1$ quindi

$$C_n = (n! \log n! + n! \varepsilon + n! - n! 2^\varepsilon) / n!$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio

Sostituendo: $C_n = (h n! + n! - 2^h) / n!$

Ma $h = \lceil \log n! \rceil = \log n! + \varepsilon$ per $0 \leq \varepsilon < 1$ quindi

$$\begin{aligned} C_n &= (n! \log n! + n! \varepsilon + n! - n! 2^\varepsilon) / n! \\ &= \log n! + (1 + \varepsilon - 2^\varepsilon) \end{aligned}$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

Teorema: Il numero minimo di confronti che un algoritmo di ordinamento deve effettuare è $\Omega(n \log n)$ nel caso medio

Sostituendo: $C_n = (h n! + n! - 2^h) / n!$

Ma $h = \lceil \log n! \rceil = \log n! + \varepsilon$ per $0 \leq \varepsilon < 1$ quindi

$$\begin{aligned} C_n &= (n! \log n! + n! \varepsilon + n! - n! 2^\varepsilon) / n! \\ &= \log n! + (1 + \varepsilon - 2^\varepsilon) \\ &\geq \log n! = n \log n - n \log e \\ &= \Omega(n \log n) \end{aligned}$$

Limite Inferiore per il Caso Medio

Corollario: HeapSort e MergeSort sono algoritmi di ordinamento per confronto asintoticamente ottimi.

Abbiamo già calcolato che il limite superiore del tempo di esecuzione *medio* di entrambi gli algoritmi è $O(n \log n)$.

Ma questo limite corrisponde esattamente a limite inferiore $\Omega(n \log n)$ appena calcolato per il caso medio.

Da queste due osservazioni segue il corollario!