Alberi di Ricorrenza

Gli *alberi di ricorrenza* rappresentano un modo conveniente per visualizzare i passi di sostituzione necessari per risolvere una ricorrenza col *Metodo Iterativo*.

Utili per semplificare i calcoli ed evidenziare le *condizioni limite* della ricorrenza.

Alberi di Ricorrenza

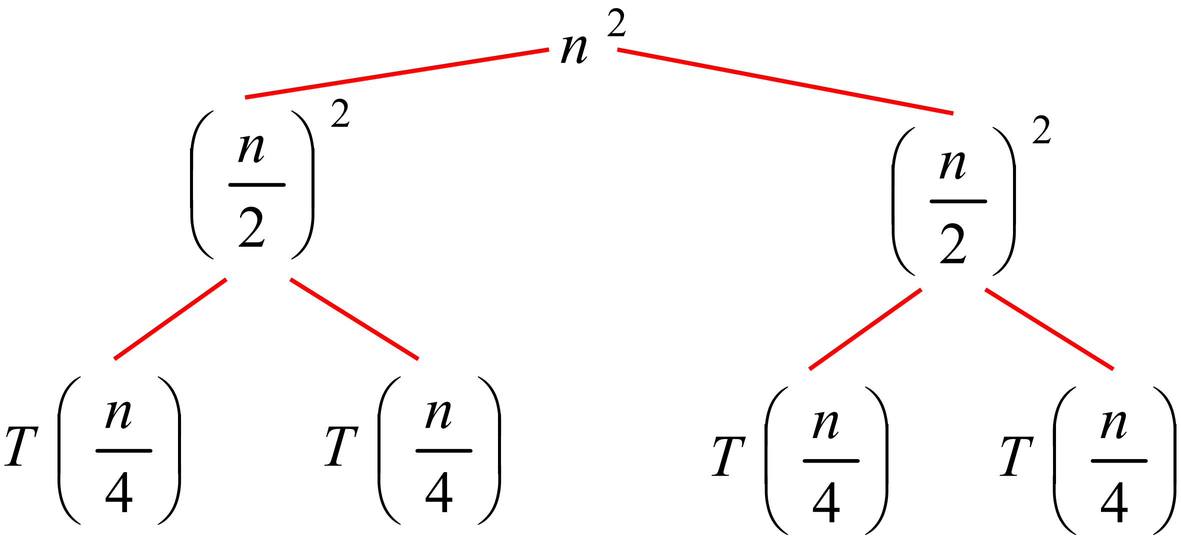
Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$

$$n^2$$

$$T\left(\frac{n}{2}\right) \qquad\qquad T\left(\frac{n}{2}\right)$$

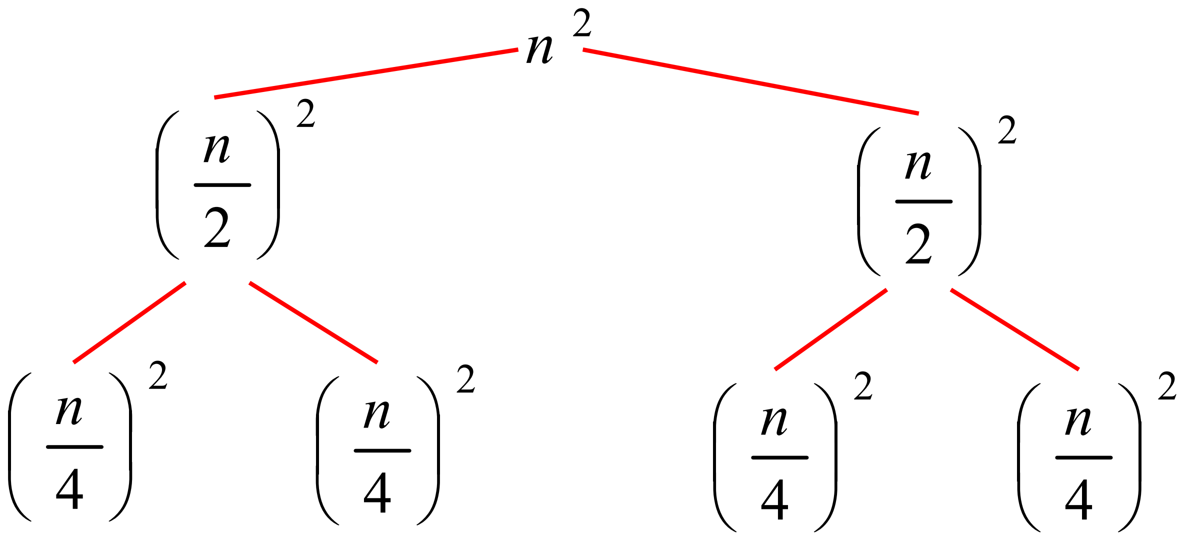
Alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$



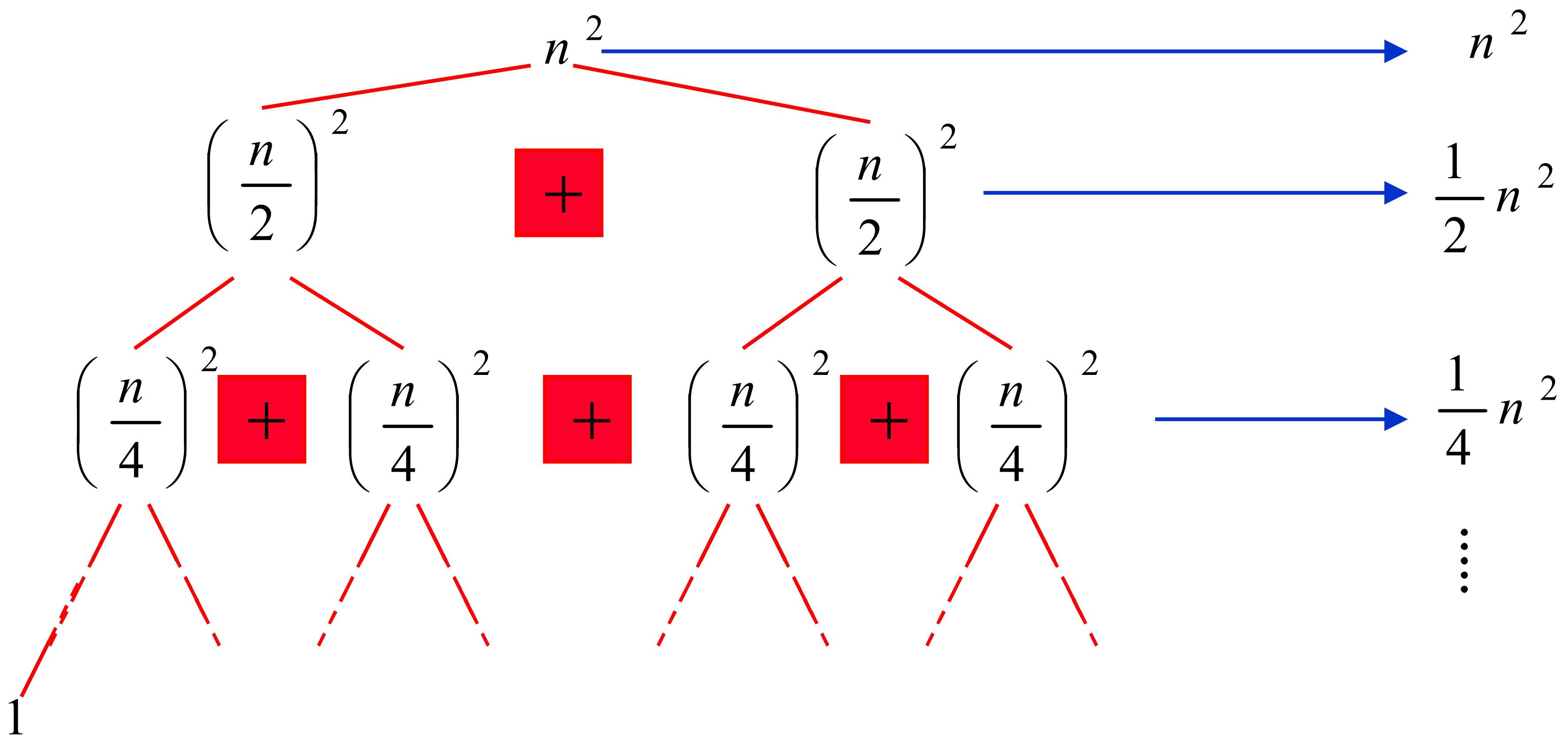
Alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$



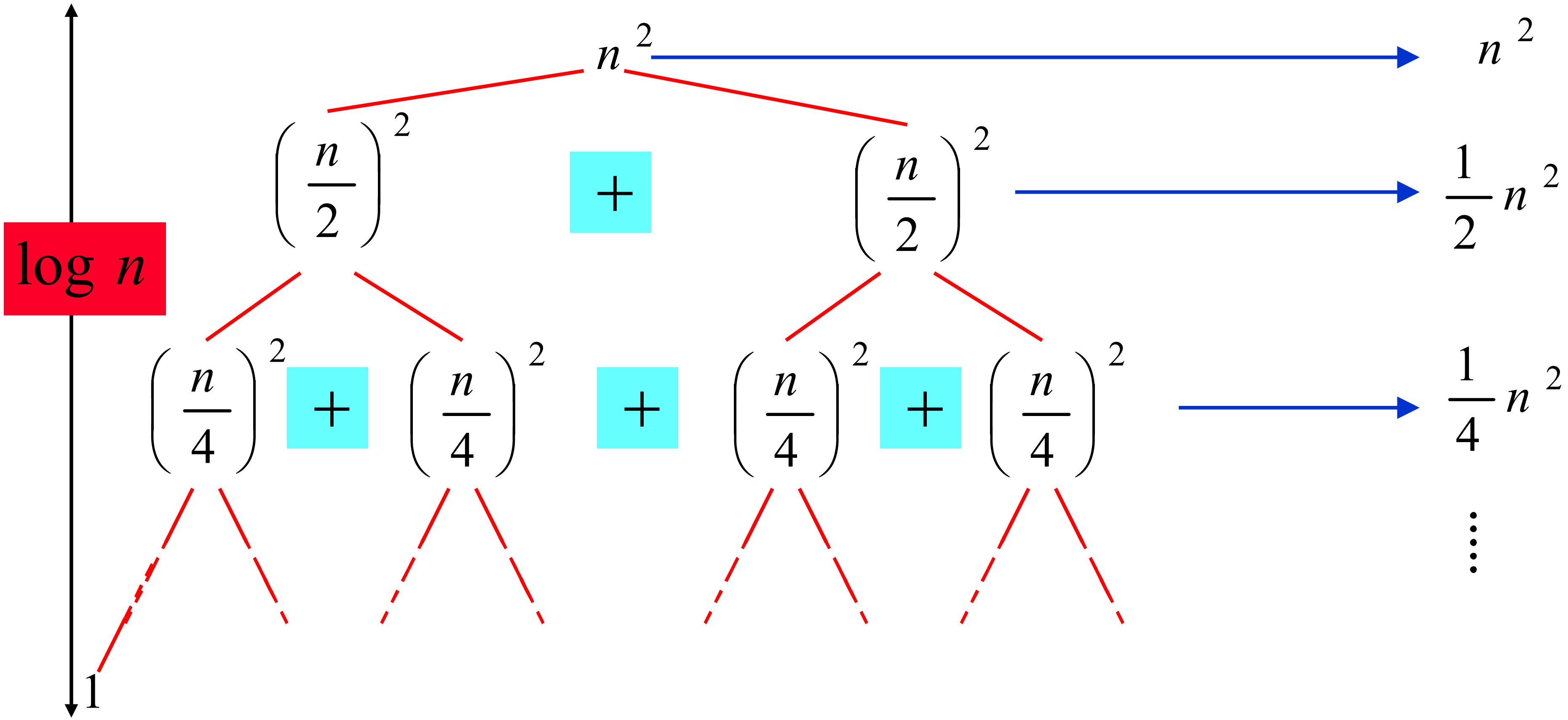
Alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$



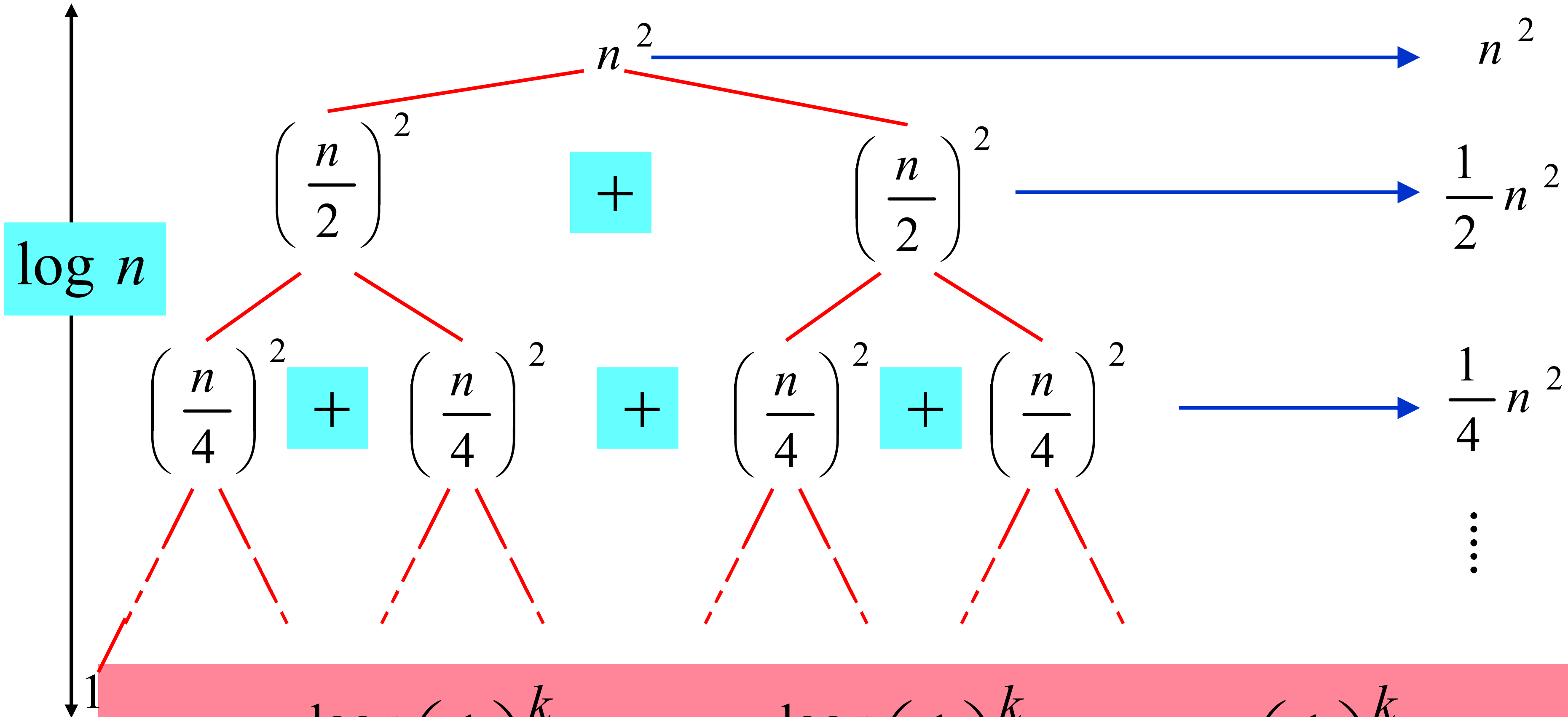
Alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$



Alberi di Ricorrenza

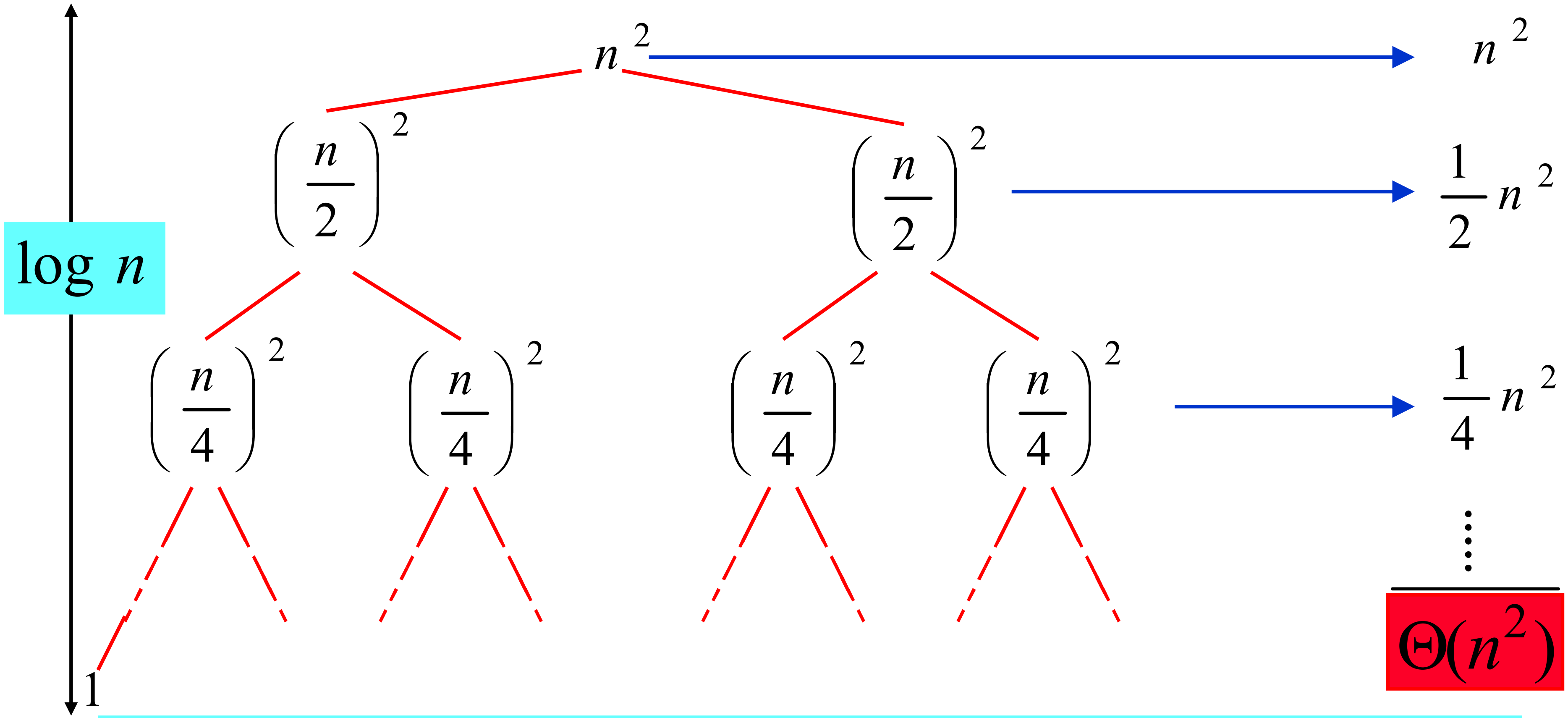
Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$



$$T(n) = \sum_{k=0}^{\log n} \left(\frac{1}{2}\right)^k n^2 = n^2 \sum_{k=0}^{\log n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2n^2$$

Alberi di Ricorrenza

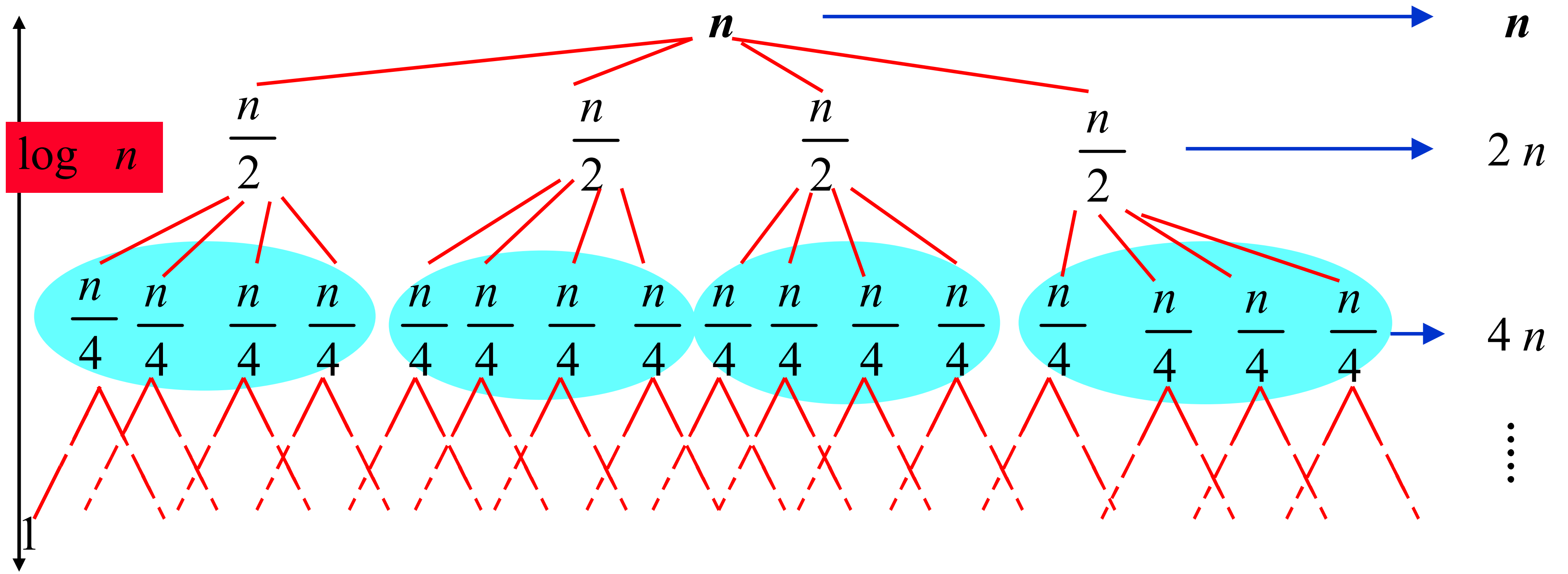
Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$



$$T(n) = \sum_{k=0}^{\log n} \left(\frac{1}{2}\right)^k n^2 = n^2 \sum_{k=0}^{\log n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \le n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2n^2$$

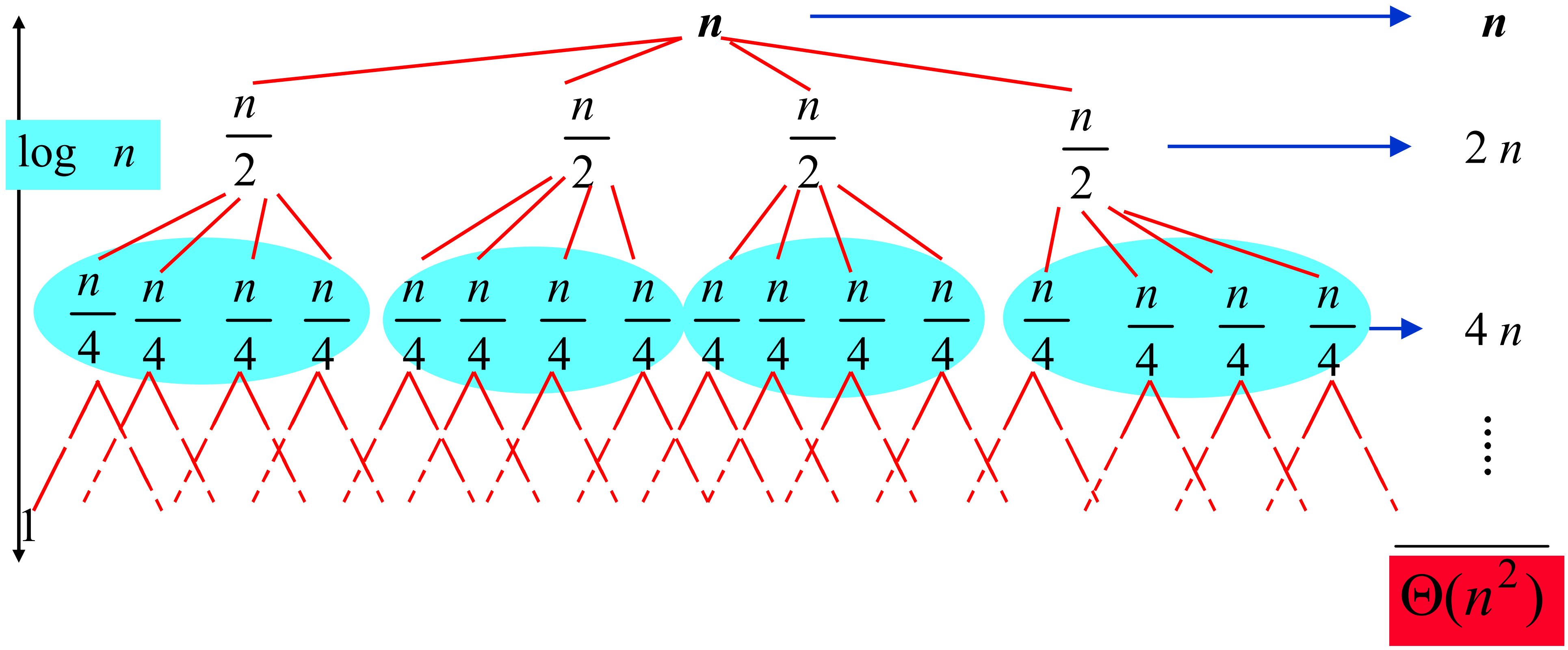
Alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 4T(n/2) + n$



Alberi di Ricorrenza

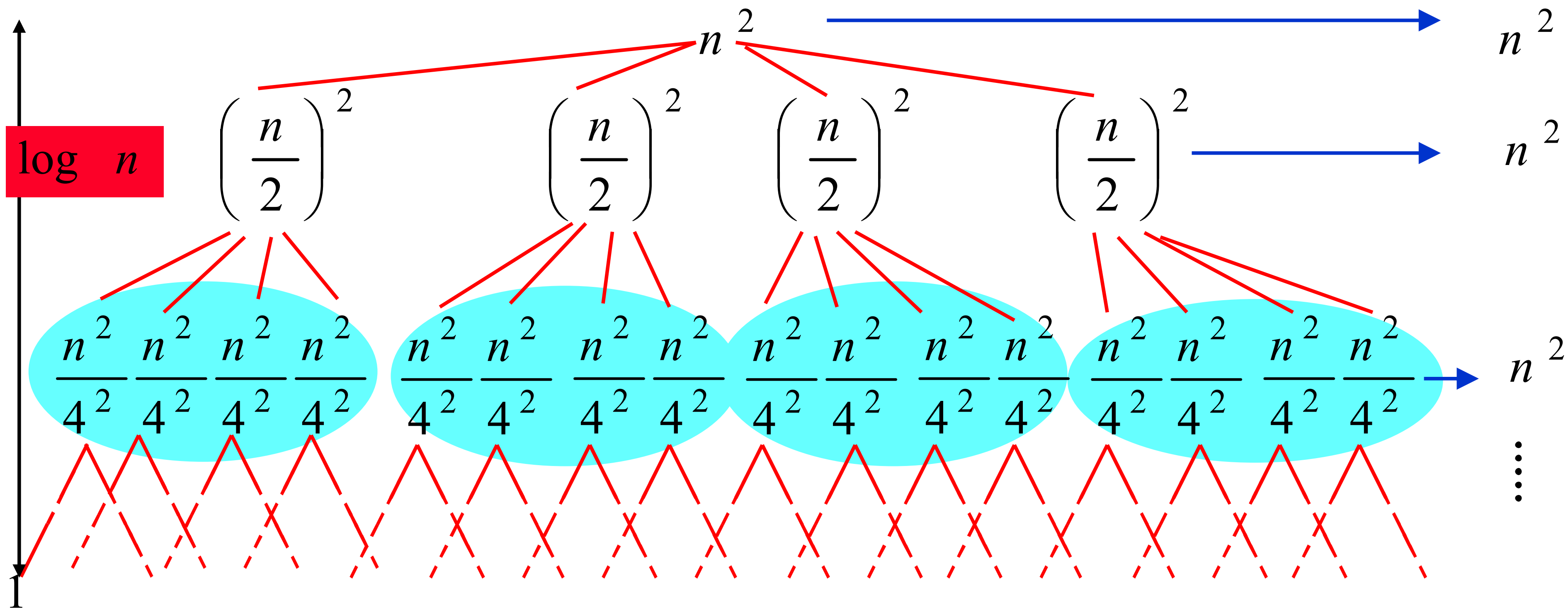
Esempio: $T(n) = 4T(n/2) + n$



$$T(n) = \sum_{k=0}^{\log n} n2^k = n\sum_{k=0}^{\log n} 2^k = \frac{2^{\log n+1}-1}{2-1}n = (2n-1)n = 2n^2 - 1$$

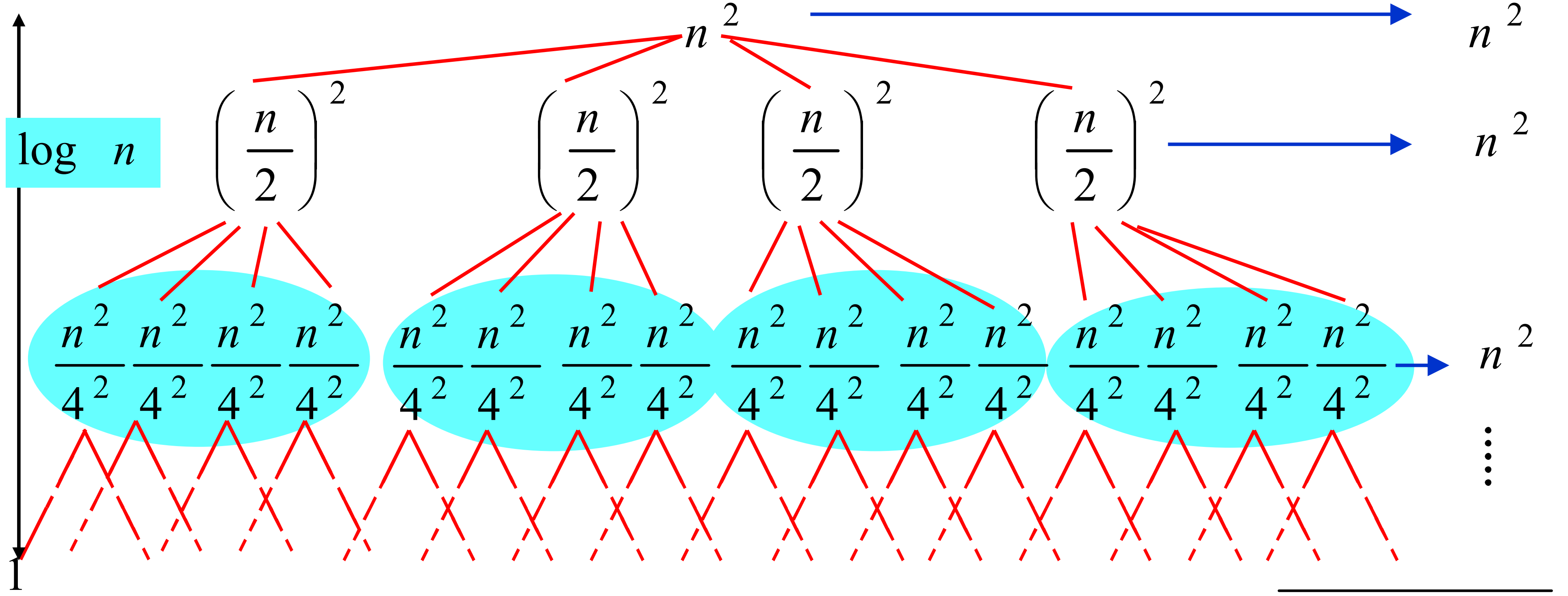
Alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 4T(n/2) + n^2$



Alberi di Ricorrenza

Esempio: $T(n) = 4T(n/2) + n^2$



$\Theta(n^2 \log n)$

$$T(n) = \sum_{k=1}^{\log n} n^2 = n^2 \sum_{k=1}^{\log n} 1 = n^2 \log n$$

Analisi di QuickSort: caso medio

Il *tempo di esecuzione* di `QuickSort` dipende dal *bilanciamento* delle partizioni effettuate dall'algoritmo `Partiziona`

Ci resta da capire come si comporta nel *caso medio*: è più vicino al *caso migliore* o al *caso peggiore*?

Analisi di QuickSort: caso medio

Analizziamo alcuni possibili casi di cattivo bilanciamento delle partizioni.

- **Supponiamo che ad ogni chiamata l'algoritmo `Partiziona` produca una partizione che è i 9/10 dell'altra (*partizionamento sbilanciato*)**

- **Supponiamo che ad ogni chiamata l'algoritmo `Partiziona` produca una partizione che è i 99/100 dell'altra (*partizionamento molto sbilanciato*)**

Analisi di QuickSort: caso medio

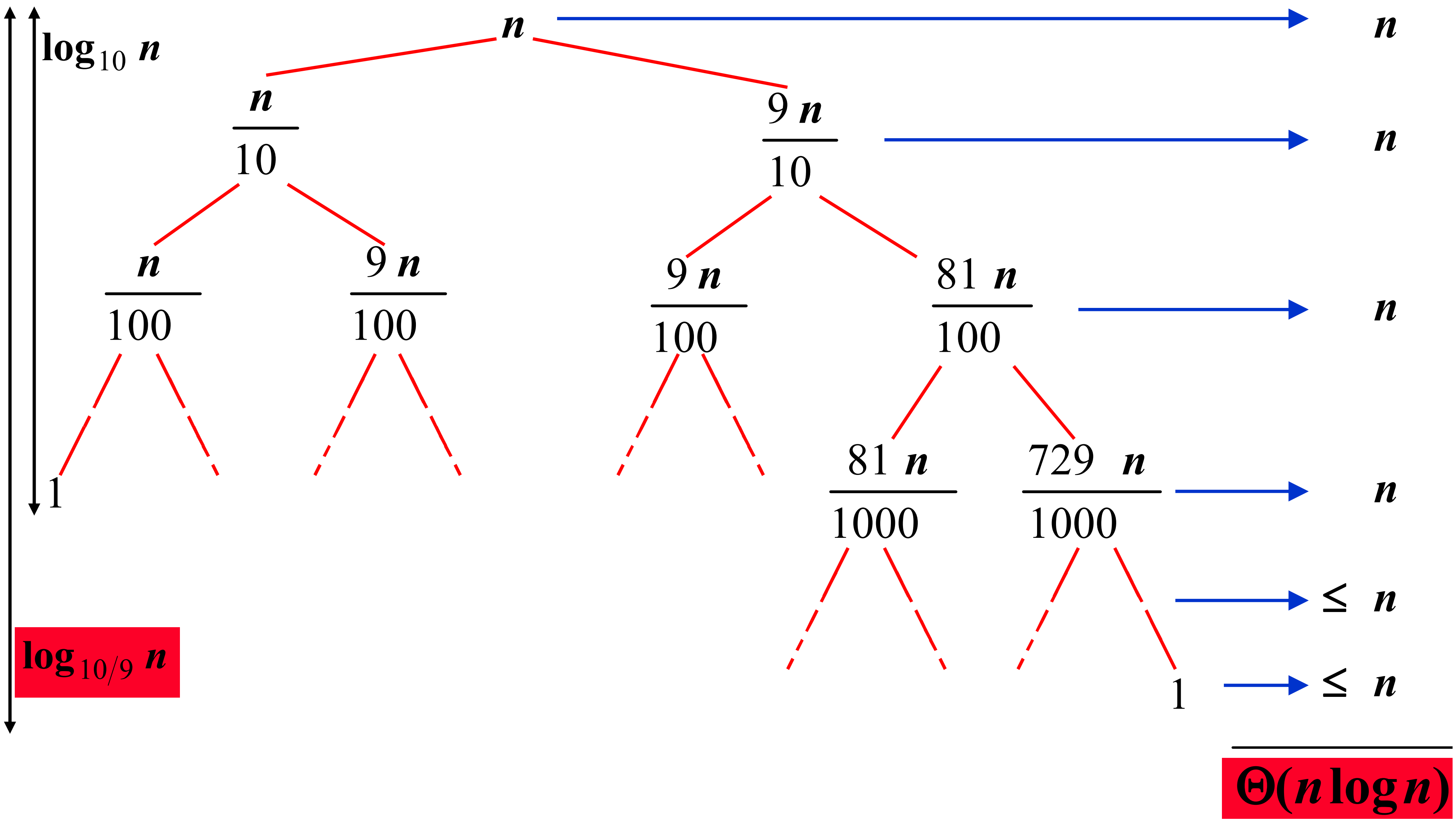
- ☆ **Supponiamo che ad ogni chiamata l'algoritmo `Partiziona` produca una partizione che è i 9/10 dell'altra (*partizionamento sbilanciato*)**

L'equazione di ricorrenza diventa quindi:

$$T(n) = T(9n/10) + T(n/10) + n$$

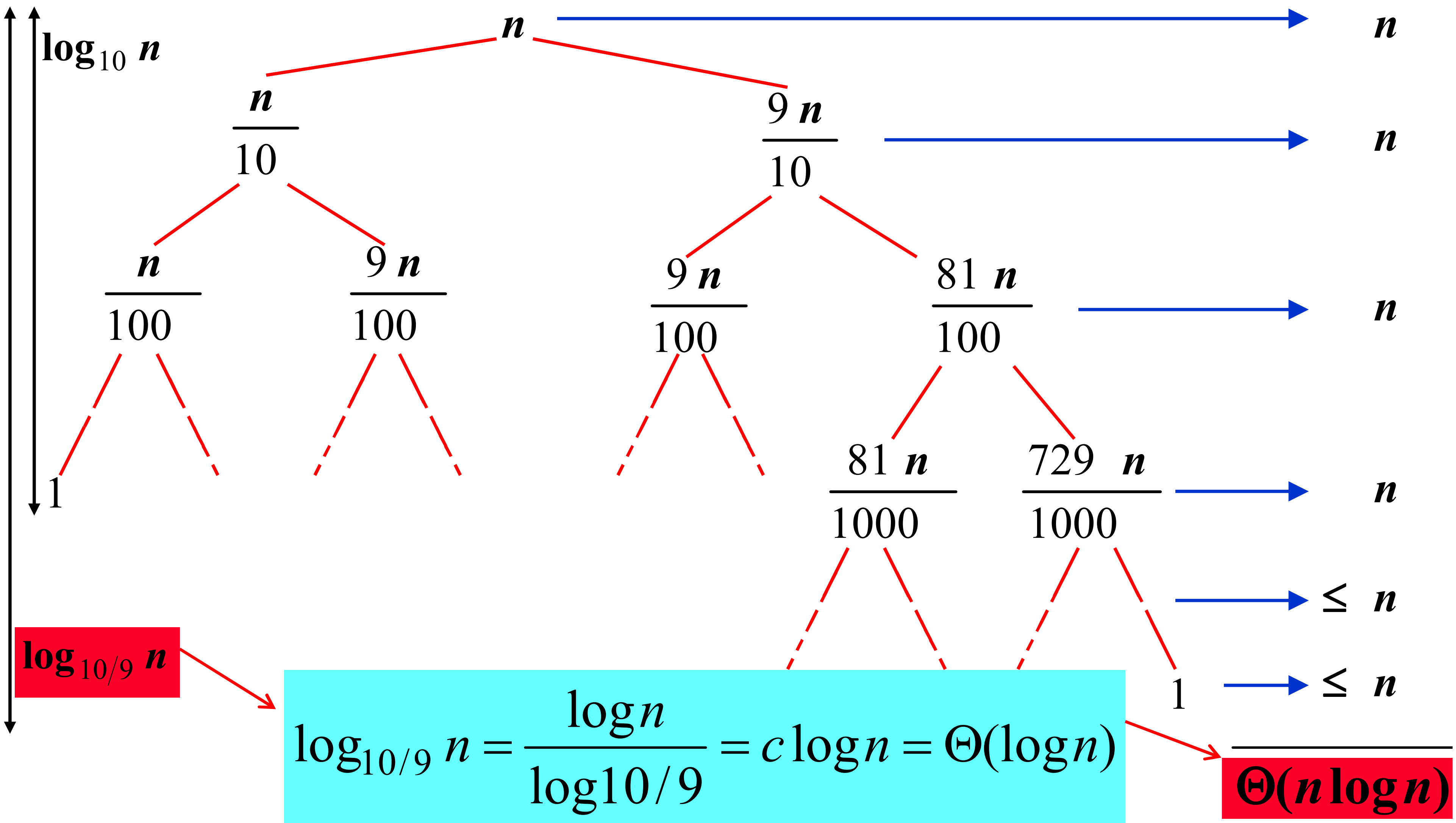
Analisi di QuickSort: caso medio

$$T(n) = T(9n/10) + T(n/10) + n$$



Analisi di QuickSort: caso medio

$$T(n) = T(9n/10) + T(n/10) + n$$



$$\log_{10/9} n = \frac{\log n}{\log 10/9} = c \log n = \Theta(\log n)$$

$$\Theta(n \log n)$$

Analisi di QuickSort: caso medio

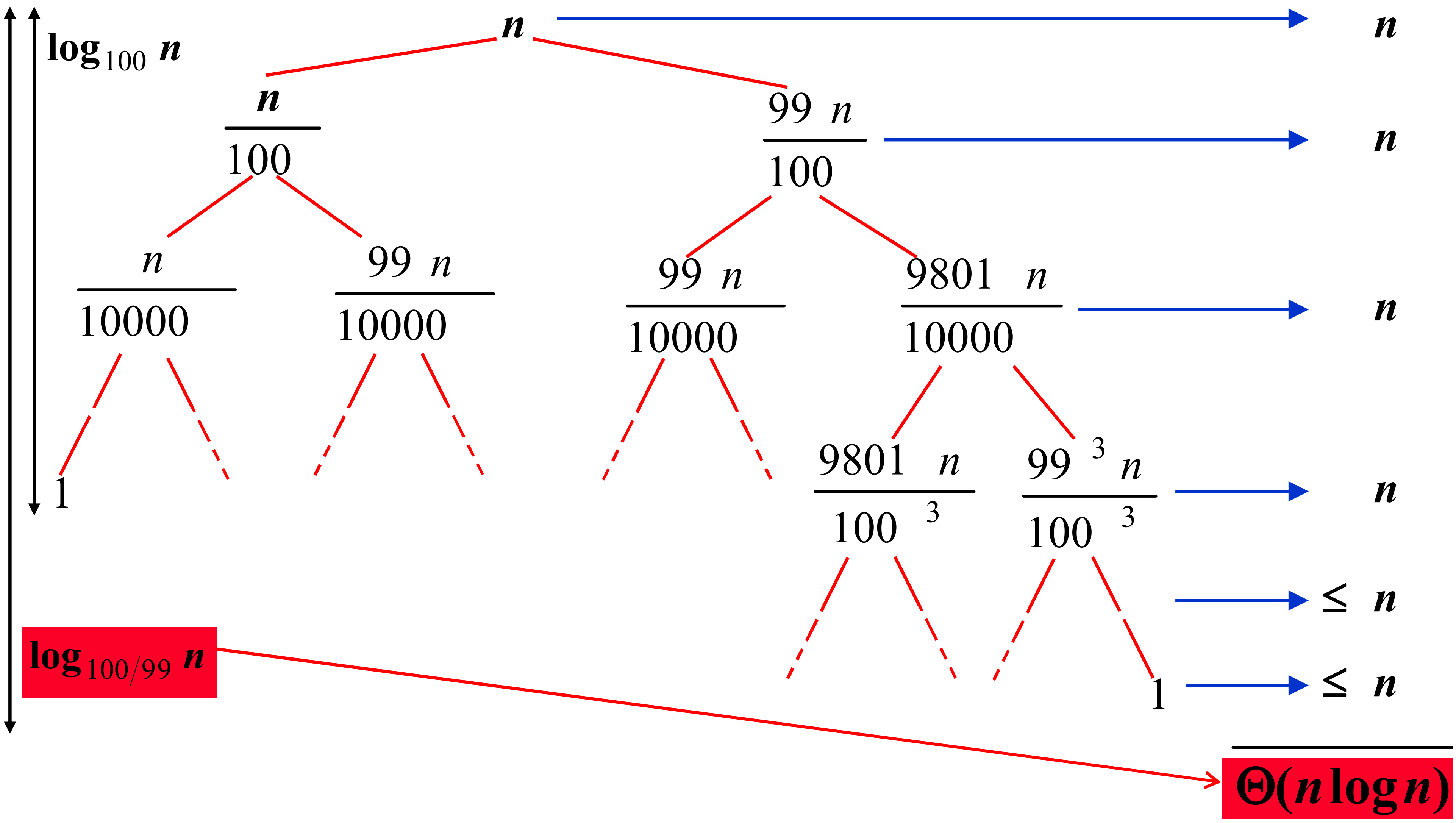
- **Supponiamo che ad ogni chiamata l'algoritmo `Partiziona` produca una partizione che è i 99/100 dell'altra (*partizionamento sbilanciato*)**

L'equazione di ricorrenza diventa quindi:

$$T(n) = T(99n/100) + T(n/100) + n$$

Analisi di QuickSort: caso medio

$$T(n) = T(99n/100) + T(n/100) + n$$



Analisi di QuickSort: caso medio

In effetti si può dimostrare che:

ogni volta che `Partiziona` suddivide l'array in *porzioni* che *differiscono* per un *fattore proporzionale costante*,

> ***il Tempo di Esecuzione* è $\Theta(n \log n)$**

Analisi di QuickSort: caso medio

Per fare un'analisi corretta del caso medio, è necessario definire una nozione chiara di *caso medio*.

Assumiamo allora che tutte le *permutazioni* dei valori in input abbiamo *uguale probabilità* di presentarsi.

In tal caso, se `QuickSort` è eseguito su un array di input casuale (*random*), ci aspettiamo che alcune *partizioni* siano *ben bilanciate* ed altre *mal bilanciate*.

Analisi di QuickSort: caso medio

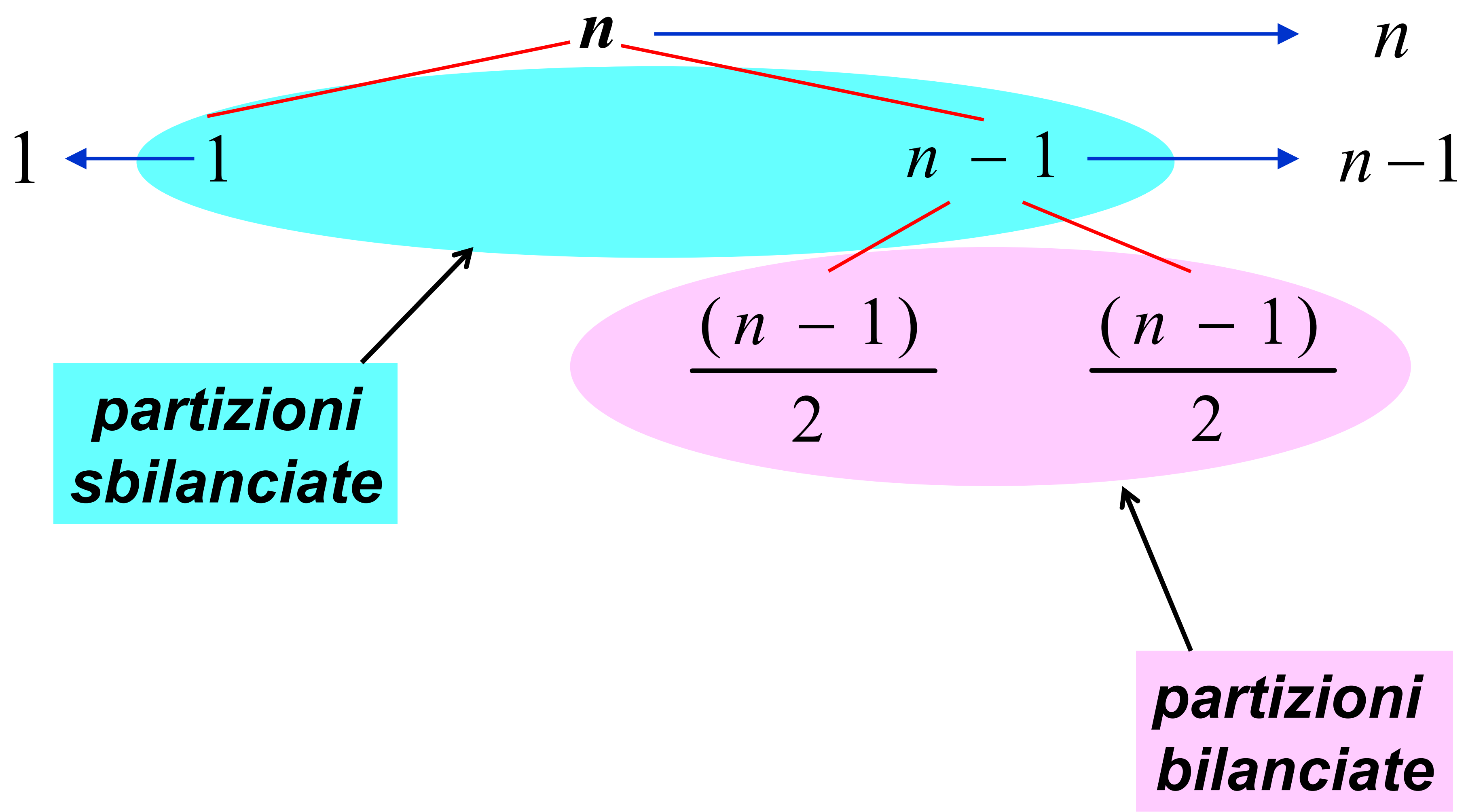
Nel caso medio `Partiziona` produrrà un "*mix*" di *partizioni ben bilanciate* e *mal bilanciate*, distribuite casualmente lungo l'albero di ricorsione.

Supponiamo che le *partizioni ben bilanciate* e quelle *mal bilanciate* si alternino nei diversi livelli dell'albero, cioè:

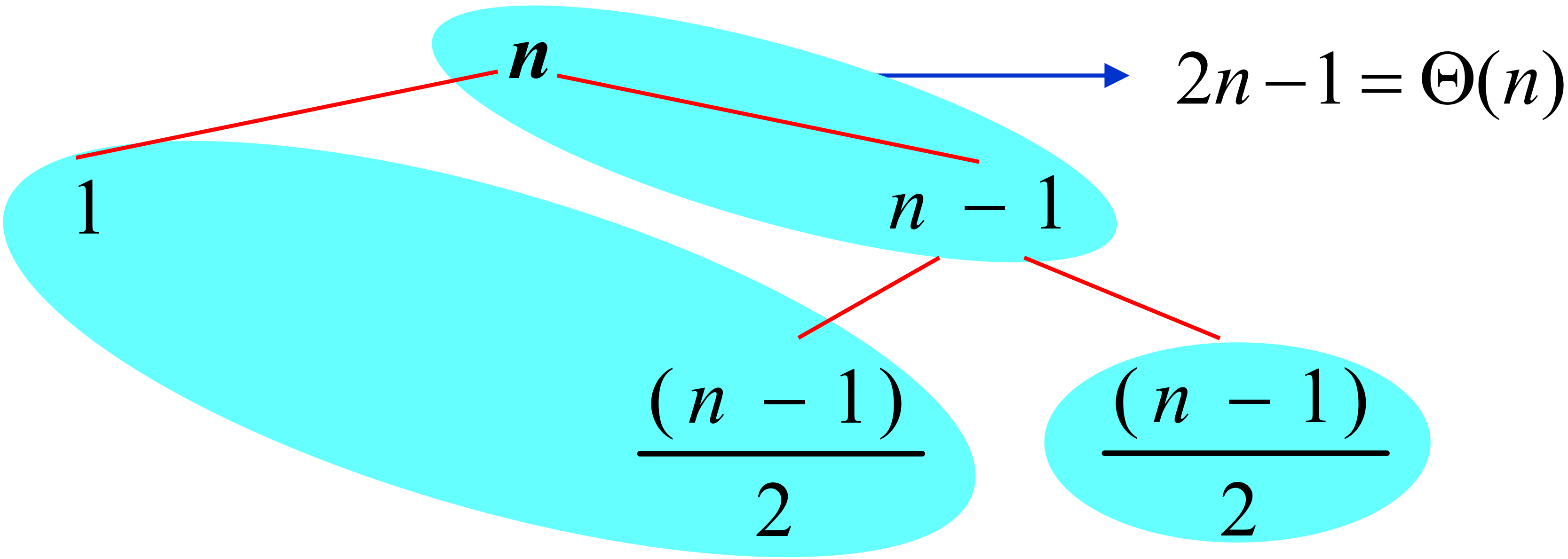
a livello i le partizioni sono di dimensioni 1 e $n - 1$

a livello $i + 1$ le partizioni sono di dimensioni $n/2$ ed $n/2$

Analisi di QuickSort: caso medio

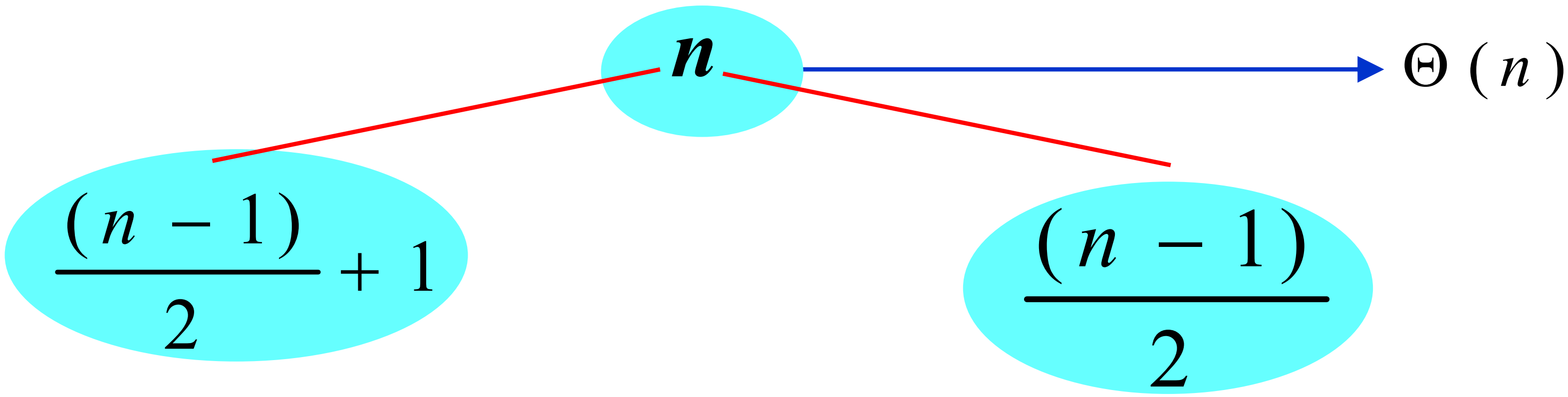


Analisi di QuickSort: caso medio



Combinando il costo di un partizionamento sbilanciato seguito da uno bilanciato, si ottiene un costo combinato sui due livelli che è $\Theta(n)$

Analisi di QuickSort: caso medio



La situazione del partizionamento precedente non è peggiore di questa, che ha ancora un costo dell'ordine di $\Theta(n)$ e rappresenta un partizionamento* piuttosto *ben bilanciato

Analisi di QuickSort: caso medio

Dunque, supponendo che le partizioni ben bilanciate e quelle mal bilanciate si alternino nei diversi livelli dell'albero:

otteniamo che in questo caso il costo medio è ancora $O(n \log n)$

dove, però, ora la notazione O-grande nasconde una costante maggiore che nel caso migliore

Analisi di QuickSort

L'analisi che abbiamo fatto si basa sull'assunzione che ciascun input abbia uguale probabilità di presentarsi.

Questa non è però sempre un'assunzione sufficientemente generale!

Possiamo fare di più! Invece di assumere una distribuzione casuale, è possibile importa!

ad esempio permutando in maniera casuale gli elementi dell'array in input

Analisi di QuickSort Random

```
int Partiziona-Random(A,p,r)
   i = Random(p,r)
   "scambia A[p] con A[i]"
   return Partiziona(A,p,r)
```

`Random(p,r)` : ritorna un intero che è un valore casuale compreso tra *p* ed *r*.

Analisi di QuickSort Random

```
int Partiziona-Random(A,p,r)
   i = Random(p,r)
   "scambia A[p]con A[i]"
   return Partiziona(A,p,r)
```

Sposta in *A*[*p*] il valore contenuto in *A*[*i*] determinando così una scelta casuale del *Pivot*.

Analisi di QuickSort Random

```
int Partiziona-Random(A,p,r)
  i = Random(p,r)
  "scambia A[p]con A[i]"
  return Partiziona(A,p,r)
```

```
Quick-Sort-Random(A,p,r)
  IF p < r
  THEN
    q = Partiziona-Random(A,p,r)
    Quick-Sort-Random(A,p,q)
    Quick-Sort-Random(A,q+1,r)
```

Analisi di QuickSort Random

La versione random di QuickSort presentata:

non modifica le prestazioni nel caso peggiore (che rimane quadratico) Perché?

né modifica le prestazioni nel caso migliore o medio.

ma rende le prestazioni indipendenti dall'ordinamento iniziale dell'array di input.

non c'è alcun particolare input che determina il verificarsi del caso peggiore (né del caso migliore).

Analisi di QuickSort Random: Caso Peggiore

`Partiziona` ***suddivide un array di dimensione n in due partizioni di dimensioni (casuali) non note, che diremo q e $n-q$, rispettivamente.***

Per calcolare il caso peggiore, cercheremo di calcolare il valore massimo del tempo di esecuzione dato dalla ricorrenza

$$T(n) = T(q) + T(n-q) + \Theta(n)$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Peggiore

`Partiziona` ***suddivide un array di dimensione n in due partizioni di dimensioni (casuali) non note, che diremo q e $n-q$, rispettivamente.***

Per calcolare il caso peggiore, cercheremo di calcolare il valore massimo, al variare di q, del tempo di esecuzione dato dalla ricorrenza

$$T(n) = T(q) + T(n-q) + \Theta(n)$$

Cioè:

$$\boxed{T(n) = \max_{1 \le q \le n-1} \{T(q) + T(n-q)\} + \Theta(n)}$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Peggiore

$$T(n) = \max_{1 \le q \le n-1} \{T(q) + T(n-q)\} + \Theta(n)$$

Usiamo il *metodo di sostituzione*

Ipotizziamo $T(n) \le cn^2$

Sostituendo otteniamo

$$T(n) \le \max_{1 \le q \le n-1} \{ cq^2 + c(n-q)^2 \} + \Theta(n)$$

$$\le c \max_{1 \le q \le n-1} \{ q^2 + (n-q)^2 \} + \Theta(n)$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Peggiore

$$T(n) = \max_{1 \le q \le n-1} \{T(q) + T(n-q)\} + \Theta(n)$$

$$T(n) \le c \max_{1 \le q \le n-1} \{ q^2 + (n-q)^2 \} + \Theta(n)$$

Ci serve sapere quando $q^2 + (n-q)^2$ raggiunge il valore massimo tra 1 e $n-1$

Calcoliamo la sua derivata prima:

$$2q - 2(n-q) = 4q - 2n$$

che è negativa per $q < n/2$ e positiva per $q > n/2$

Analisi di QuickSort Random: Caso Peggiore

$$T(n) = \max_{1 \leq q \leq n-1} \{T(q) + T(n-q)\} + \Theta(n)$$

$$T(n) \leq c \max_{1 \leq q \leq n-1} \{ q^2 + (n-q)^2 \} + \Theta(n)$$

La <u>derivata prima</u>:

$$2q - 2(n-q) = 4q - 2n$$

è negativa per $q < n/2$ e positiva per $q > n/2$

Quindi, $q^2 + (n-q)^2$ nell'intervallo $[1,n-1]$ raggiunge il <u>valore massimo</u> quando $q = 1$ o $q = n-1$.

Analisi di QuickSort Random: Caso Peggiore

$$T(n) = \max_{1 \le q \le n-1} \{T(q) + T(n-q)\} + \Theta(n)$$

$$T(n) \le c \max_{1 \le q \le n-1} \{ q^2 + (n-q)^2 \} + \Theta(n)$$

$$\le c\,(1^2 + (n-1)^2) + \Theta(n)$$

$$\le c\,(n^2 - 2(n-1)) + \Theta(n)$$

$$\le c\, n^2 - 2c\,(n-1) + \Theta(n)$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Peggiore

$$T(n) = \max_{1 \leq q \leq n-1} \{T(q) + T(n-q)\} + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq c \max_{1 \leq q \leq n-1} \{ q^2 + (n-q)^2 \} + \Theta(n) \\
&\leq c\,(1^2 + (n-1)^2) + \Theta(n) \\
&\leq c\,(n^2 - 2(n-1)) + \Theta(n) \\
&\leq c\,n^2 - 2c\,(n-1) + \Theta(n) \\
&\leq c\,n^2
\end{aligned}$$

poiché possiamo scegliere c abbastanza grande da rendere $2c\,(n-1)$ dominante su $\Theta(n)$

Analisi di QuickSort Random: Caso Migliore

`Partiziona` *suddivide un array di dimensione n in due partizioni di dimensioni (casuali) non note, che diremo q e $n-q$, rispettivamente.*

*Per calcolare il caso migliore, cercheremo di calcolare il valore **minimo** del tempo di esecuzione dato dalla ricorrenza*

$$T(n) = T(q) + T(n-q) + \Theta(n)$$

Cioè:

$$\boxed{T(n) = \min_{1 \leq q \leq n-1} \{T(q) + T(n-q)\} + \Theta(n)}$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Migliore

$$T(n) = \min_{1 \leq q \leq n-1} \{T(q) + T(n-q)\} + \Theta(n)$$

Usiamo il *metodo di sostituzione*

Ipotizziamo $T(n) \leq c\, n \log n$

Analisi di QuickSort Random: Caso Migliore

$$T(n) = \min_{1 \le q \le n-1} \{T(q) + T(n-q)\} + \Theta(n)$$

Usiamo il metodo di sostituzione

Ipotizziamo $T(n) \le c\, n \log n$

Sostituendo otteniamo

$$T(n) \le \min_{1 \le q \le n-1} \{ c\, q \log q + c\,(n-q) \log (n-q) \} + \Theta(n)$$

$$\le c \min_{1 \le q \le n-1} \{q \log q + (n-q) \log (n-q) \} + \Theta(n)$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Migliore

$$T(n) = \min_{1 \leq q \leq n-1} \{T(q) + T(n-q)\} + \Theta(n)$$

$$T(n) \leq c \min_{1 \leq q \leq n-1} \{q \log q + (n-q) \log (n-q)\} + \Theta(n)$$

Ci serve sapere quando $q \log q + (n-q) \log (n-q)$ raggiunge il valore minimo tra 1 e $n-1$

Calcoliamo la sua <u>derivata prima</u>:

$$\log q - \log(n-q)$$

che è nulla per $q = n/2$, negativa per $q < n/2$ e positiva per $q > n/2$ (quindi $q = n/2$ è un minimo)

Analisi di QuickSort Random: Caso Migliore

$$T(n) = \min_{1 \leq q \leq n-1} \{T(q) + T(n-q)\} + \Theta(n)$$

$$T(n) \leq c \min_{1 \leq q \leq n-1} \{q \log q + (n-q) \log (n-q)\} + \Theta(n)$$

La <u>derivata prima</u>:

$\log q - \log(n-q)$

che è nulla per $q = n/2$, negativa per $q < n/2$ e positiva per $q > n/2$ (cioè $q = n/2$ è un minimo)

Quindi $q \log q + (n-q) \log (n-q)$ raggiunge il valore minimo tra 1 e $n-1$ quando $q = n/2$

Analisi di QuickSort Random: Caso Migliore

$$T(n) = \min_{1 \le q \le n-1} \{T(q) + T(n-q)\} + \Theta(n)$$

$$T(n) \le c \min_{1 \le q \le n-1} \{q \log q + (n-q) \log (n-q)\} + \Theta(n)$$

$$\le c\,(n \log n/2) + \Theta(n)$$

$$\le c\,n \log n - c\,n + \Theta(n)$$

$$\le c\,n \log n - c\,n + \Theta(n)$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Migliore

$$T(n) = \min_{1 \leq q \leq n-1} \{T(q) + T(n-q)\} + \Theta(n)$$

$$T(n) \leq c \min_{1 \leq q \leq n-1} \{q \log q + (n-q) \log (n-q)\} + \Theta(n)$$

$$\leq c\,(n \log n/2) + \Theta(n)$$

$$\leq c\, n \log n - c\, n + \Theta(n)$$

$$\leq c\, n \log n - c\, n + \Theta(n)$$

$$\leq c\, n \log n$$

*poiché possiamo scegliere **c** abbastanza grande da rendere **c n** dominante su $\Theta(n)$*

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

Quello che dobbiamo fare è costruire l'equazione di ricorrenza per il caso medio.

- ***Per semplificare l'analisi, assumeremo che tutti gli elementi siano distinti.***

- **`Partiziona-Random`** ***chiama*** **`Partiziona`** ***dopo aver scambiato*** **`A[p]`** ***con un elemento a caso dell'array***

- ***quale sarà allora il valore di q ritornato da*** **`Partiziona`*****?***

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

Quale sarà allora il valore di q ritornato `Partiziona`?

- ***Dipenderà dal rango di `A[p]` (che è un elemento casuale dell'array).***

- ***Il rango di un numero x rispetto a `A[p,…,r]` è il numero di elementi di `A[p,…,r]` che sono minori o uguali ad x***

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

Quale sarà allora il valore di q ritornato `Partiziona`*?*

- *Dipenderà dal rango di* `A[p]` *(che è un elemento casuale dell'array).*

- *Essendo* `A[p]` *un elemento casuale dell'array, la probabilità che il rango di* `A[p]` *sia i (con $i = 1,\ldots,n$) sarà $1/n$ (dove $n = r - p + 1$)*

poiché tutti gli elementi hanno uguale probabilità di essere scelti e sono tutti distinti.

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

Quale sarà allora il valore di q ritornato `Partiziona`?

- ***Se il rango è 1, `Partiziona` ritornerà una partizione lunga 1 e una lunga n-1***
- ***Se il rango è 2, `Partiziona` ritornerà ancora una partizione lunga 1 e una lunga n-1***
- ...
- ***Se il rango è h, `Partiziona` ritornerà una partizione lunga h-1 e una lunga n-h+1***
- ***Se il rango è n, `Partiziona` ritornerà una partizione lunga n-1 e una lunga 1***

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

Quale sarà allora il valore di q ritornato `Partiziona`?

- *Se il rango è 1,* `Partiziona` *ritornerà una partizione lunga 1 e una lunga $n-1$*
- *Se il rango è h (per $h \geq 2$),* `Partiziona` *ritornerà una partizione lunga $h-1$ e una lunga $n-h+1$*

ciascun caso ha probabilità $1/n$

Nota: tutto questo è garantito solo se gli elementi sono tutti distinti!

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

Quale sarà allora il valore di q ritornato `Partiziona`*?*

❺ *Se il rango è 1* `Partiziona` *ritornerà una partizione lunga 1 e una lunga n-1*

allora $q = 1$ e `QuickSort` *sarà chiamato ricorsivamente su partizioni di dimensioni rispettivamente 1 ed n-1*

con probabilità $1/n$

***Nota:** tutto questo è garantito solo se gli elementi sono tutti distinti!*

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

Quale sarà allora il valore di q ritornato `Partiziona`*?*

❺ *Se il rango è h (per $h \geq 2$)* `Partiziona` *ritornerà una partizione lunga $h-1$ e una lunga $n-h+1$*

allora $q = h-1$ e `QuickSort` *sarà chiamato ricorsivamente su partizioni di dimensioni $h-1$ e $n-h+1$*

con probabilità $1/n$

***Nota:** tutto questo è garantito solo se gli elementi sono tutti distinti!*

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$T(n) = \left(T(1) + T(n-1) + \right) + \Theta(n)$$

Se il rango è 1 **`Partiziona`** ***ritornerà una partizione lunga 1 e una lunga n-1***

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$T(n) = \boxed{\phantom{\tfrac{1}{n}}}\left(\boxed{T(1) + T(n-1)} + \boxed{\sum_{q=1}^{n-1} \big(T(q) + T(n-q)\big)} \right) + \Theta(n)$$

Se il rango è 1 `Partiziona` ***ritornerà una partizione lunga 1 e una lunga n-1***

Se il rango è h (per h≥2) `Partiziona` ***ritornerà una partizione lunga h-1 e una lunga n-h+1 (q varia tra 1 e n-1)***

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$T(n) = \boxed{\frac{1}{n}}\left(\boxed{T(1) + T(n-1)} + \boxed{\sum_{q=1}^{n-1} \left(T(q) + T(n-q)\right)} \right) + \Theta(n)$$

Se il rango è 1 `Partiziona` ***ritornerà una partizione lunga 1 e una lunga n-1***

ciascun caso ha probabilità 1/n

Se il rango è h (per h≥2) `Partiziona` ***ritornerà una partizione lunga h-1 e una lunga n-h+1 (q varia tra 1 e n-1)***

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

L'equazione di ricorrenza per il caso medio sarà quindi:

$$T(n) = \frac{1}{n}\left(T(1) + T(n-1) + \sum_{q=1}^{n-1} (T(q) + T(n-q)) \right) + \Theta(n)$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$T(n) = \frac{1}{n}\left(T(1) + T(n-1) + \sum_{q=1}^{n-1} \left(T(q) + T(n-q)\right) \right) + \Theta(n)$$

$$\frac{1}{n}\left(T(1) + T(n-1)\right) = \frac{1}{n}\left(\Theta(1) + O(n^2)\right)$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$T(n) = \frac{1}{n}\left(T(1) + T(n-1) + \sum_{q=1}^{n-1} \left(T(q) + T(n-q)\right) \right) + \Theta(n)$$

$$\frac{1}{n}\left(T(1) + T(n-1)\right) = \frac{1}{n}\left(\Theta(1) + \mathrm{O}(n^2)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\mathrm{O}(n^2) = \mathrm{O}(n)$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$T(n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{q=1}^{n-1}\left(T(q) + T(n-q)\right)\right) + \Theta(n)$$

poiché O(n) viene assorbito da Θ(n)! (***Perché?***)

$$\frac{1}{n}\left(T(1) + T(n-1)\right) = \mathrm{O}(n)$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$T(n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{q=1}^{n-1}(T(q) + T(n-q))\right) + \Theta(n)$$

$$= \frac{2}{n}\left(\sum_{q=1}^{n-1} T(q)\right) + \Theta(n)$$

poiché per q che varia fra 1 e n-1 ciascun valore di T(q) compare due volte nella sommatoria, una volta come T(q) ed una come T(n-q).

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

L'equazione di ricorrenza diviene:

$$T(n) = \frac{2}{n}\left(\sum_{q=1}^{n-1} T(q)\right) + \Theta(n)$$

La risolveremo col <u>metodo di sostituzione</u>

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

L'equazione di ricorrenza diviene:

$$T(n) = \frac{2}{n}\left(\sum_{q=1}^{n-1} T(q)\right) + \Theta(n)$$

Vogliamo dinostrare che T(n) = O(n log n)

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

L'equazione di ricorrenza diviene:

$$T(n) = \frac{2}{n}\left(\sum_{q=1}^{n-1} T(q)\right) + \Theta(n)$$

Ipotizziamo

$$\boxed{T(n) \le a\, n \log n}$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

T(n) = O(n log n)

$$T(n) = \frac{2}{n}\left(\sum_{q=1}^{n-1} T(q)\right) + \Theta(n)$$

$$\leq \frac{2}{\boldsymbol{n}}\left(\sum_{q=1}^{n-1} \boldsymbol{aq} \log \boldsymbol{q}\right) + \Theta(\boldsymbol{n})$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

T(n) = O(n log n)

$$T(n) = \frac{2}{n}\left(\sum_{q=1}^{n-1} T(q)\right) + \Theta(n)$$

$$\leq \frac{2}{\boldsymbol{n}}\left(\sum_{\boldsymbol{q}=1}^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{aq}\log \boldsymbol{q}\right) + \Theta(\boldsymbol{n})$$

$$\leq \frac{2\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{q}=1}^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{q}\log \boldsymbol{q} + \Theta(\boldsymbol{n})$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$\boxed{T(n) = O(n \log n)}$$

$$T(n) = \frac{2}{n}\left(\sum_{q=1}^{n-1} T(q)\right) + \Theta(n)$$

$$\le \frac{2\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{n}} \sum_{q=1}^{n-1} \boldsymbol{q} \log \boldsymbol{q} + \Theta(\boldsymbol{n})$$

poiché si può dimostrare che

$$\sum_{q=1}^{n-1} q \log q \le \frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{8} n^2$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$\boxed{T(n) = O(n \log n)}$

$$T(n) = \frac{2}{n}\left(\sum_{q=1}^{n-1} T(q)\right) + \Theta(n)$$

$$\leq \frac{2\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{n}} \sum_{q=1}^{n-1} \boldsymbol{q} \log \boldsymbol{q} + \Theta(\boldsymbol{n})$$

$$\leq \frac{2\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{n}^2 \log \boldsymbol{n} - \frac{1}{8}\boldsymbol{n}^2\right) + \Theta(\boldsymbol{n})$$

$$\sum_{q=1}^{n-1} q \log q \leq \frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{8} n^2$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

T(n) = O(n log n)

$$T(n) = \frac{2}{n}\left(\sum_{q=1}^{n-1} T(q)\right) + \Theta(n)$$

$$\leq \frac{2\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{n}^2 \log \boldsymbol{n} - \frac{1}{8}\boldsymbol{n}^2\right) + \Theta(\boldsymbol{n})$$

$$\leq \boldsymbol{an} \log \boldsymbol{n} - \frac{\boldsymbol{a}}{4}\boldsymbol{n} + \Theta(\boldsymbol{n})$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

T(n) = O(n log n)

$$T(n) = \frac{2}{n}\left(\sum_{q=1}^{n-1} T(q)\right) + \Theta(n)$$

$$\leq \frac{2a}{n}\left(\frac{1}{2}n^2 \log n - \frac{1}{8}n^2\right) + \frac{2b}{n}(n-1) + \Theta(n)$$

$$\leq an \log n - \frac{a}{4}n + 2b + \Theta(n)$$

$$\leq \boldsymbol{an} \log \boldsymbol{n} + \left(\Theta(\boldsymbol{n}) - \frac{\boldsymbol{a}}{4}\boldsymbol{n}\right)$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

T(n) = O(n log n)

$$T(n) = \frac{2}{n}\left(\sum_{q=1}^{n-1} T(q)\right) + \Theta(n)$$

$$\leq \boldsymbol{an} \log \boldsymbol{n} - \frac{\boldsymbol{a}}{4}\boldsymbol{n} + \Theta(\boldsymbol{n})$$

$$\leq \boldsymbol{an} \log \boldsymbol{n} + \left(\Theta(\boldsymbol{n}) - \frac{\boldsymbol{a}}{4}\boldsymbol{n}\right)$$

$$\leq \boldsymbol{an} \log \boldsymbol{n}$$

Scegliendo *a* grande abbastanza da rendere *a n/4* dominante su $\Theta(n)$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

Possiamo concludere che

$$\boxed{T(n) = O(n \log n)}$$

A patto di dimostrare che

$$\boxed{\sum_{q=1}^{n-1} q \log q \leq \frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{8} n^2}$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} k \log k \leq \log n \sum_{k=1}^{n-1} k}$$

$$\leq \frac{1}{2} n(n-1) \log n = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$\boxed{\leq n^2 \log n}$$

Questo limite non è però sufficiente per risolvere la ricorrenza, ma quello che abbiamo calcolato sarà utile per trovane uno adeguato!

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log k = \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k \log k + \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k \log k$$

$$\sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k \log k \le \log(n/2) \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k$$

$$\le (\log n - 1) \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log k \le \log n \sum_{k=1}^{n-1} k$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log k = \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k \log k + \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k \log k$$

$$\sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k \log k \leq (\log n - 1) \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k$$

$$\sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k \log k \leq \log n \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log k \leq \log n \sum_{k=1}^{n-1} k$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log k = \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k \log k + \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k \log k$$

$$\sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k \log k \leq \boxed{(\log n - 1) \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k}$$

$$\sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k \log k \leq \boxed{\log n \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k}$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log k \le (\log n - 1) \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k + \log n \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k$$

$$\sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k \log k \le (\log n - 1) \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k$$

$$\sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k \log k \le \log n \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log k \le (\log n - 1) \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k + \log n \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k$$

$$\le \log n \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k + \log n \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log k \leq (\log n - 1) \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k + \log n \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k$$

$$\leq \log n \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k + \log n \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k$$

$$\leq \boxed{\log n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k}$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log k \le (\log n - 1) \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k + \log n \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k$$

$$\le \log n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k = \frac{1}{2} \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right)$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log k \le (\log n - 1) \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k + \log n \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k$$

$$\le \log n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k$$

$$\le \frac{1}{2} n(n-1) \log n - \frac{1}{2} \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k = \frac{1}{2} \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right)$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log k \le (\log n - 1) \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k + \log n \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k$$

$$\le \log n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k = \frac{1}{2} \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right)$$

$$\le \frac{1}{2} n(n-1) \log n - \frac{1}{2} \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right)$$

$$\le \frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{8} n^2$$

Analisi di QuickSort Random: Caso Medio

Possiamo concludere che:

- ***nel <u>caso medio</u>, il tempo di esecuzione è:***

$$\boxed{T(n) = O(n \log n)}$$

- ***nel <u>caso migliore</u>, il tempo di esecuzione è:***

$$\boxed{T(n) = O(n \log n)}$$

- ***nel <u>caso peggiore</u>, il tempo di esecuzione è:***

$$\boxed{T(n) = O(n^2)}$$